TS Exercices sur le plan muni d'un repère orthonormé

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 Déterminer une équation cartésienne de la droite *D* passant par le point A(1 ; – 2) et admettant le vecteur $\vec{u}\left(-3\,;\,5\right)$ pour vecteur normal.

2 On donne les points A(5 ; – 2), B(2 ; 0) et C(– 1 ; 1).
Déterminer une équation cartésienne de la droite *D* passant par C et parallèle à (AB).

3 On donne le point A(5 ; 3) et la droite *D* d'équation cartésienne $x+4y-1=0$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *D*' passant par A et perpendiculaire à *D*.

4 On donne les points A(3 ; – 2) et B(0 ; – 1).
Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment [AB].

5 On donne deux droites *D* et *D*' d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x+b'y+c'=0$ $((a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ et $(a'\,;\,b') \neq (0\,;\,0))$.
1°) Démontrer que *D* // *D*' $\Leftrightarrow ab'-a'b=0$.
2°) Démontrer que $D \perp D' \Leftrightarrow aa'+bb'=0$.

6 À tout réel *m*, on associe la droite D_m d'équation cartésienne $\left(m+1\right)x-\left(3m-1\right)y+m-4=0$.
On donne les points A(6 ; – 8) et B(0 ; 2).
1°) Déterminer *m* tel que $D_m \perp$ (AB).
2°) Déterminer *m* tel que D_m // (AB).

7 On considère les points A(1 ; 3), B(2 ; 5) et C(– 1 ; 4).
1°) Déterminer la nature du triangle ABC.
2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

8 1°) Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-4x+2y-8=0$.
2°) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x + y - 2 = 0$.

9 Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M(*x*, *y*) du plan $x^2+y^2-8x+4y+16 \leq 0$.

10 Déterminer un repère et tracer la droite *D* admettant pour système d'équations paramétriques
$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

11 1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A(3 ; – 4) passant par O.
2°) Déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ en O à $\mathcal{C}$.

12 1°) Calculer la distance du point A(3 ; – 1) à la droite *D* d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$.
2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A tangent à *D*.

13 Calculer la distance du point O à la droite *D* d'équation réduite $y = -2x + 5$.

14 On donne les points les points A(0 ; 3), B(1 ; – 1) et C(5 ; 2).
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).
2°) Calculer la distance du point A à la droite (BC) ; en déduire l'aire du triangle ABC.

15 On donne les points les points A(3 ; 0) et B(2 ; – 2).
1°) Donner l'équation réduite de la droite D_m de coefficient directeur *m* passant par B.
2°) Exprimer la distance de A à D_m.
3°) En déduire pour quelles valeurs de *m* la droite D_m est tangente au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 (on exprimera que la distance de A à D_m est égale à 2).

16 On considère les points A(5 ; 0) et B(0 ; 3).
1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2°) Déterminer un système d'inéquations caractérisant l'intérieur du triangle OAB (frontières comprises).

17 Représenter l'ensemble des points M(*x*, *y*) tels que $\dfrac{x}{2}+1<y<x+1$.

Réponses

$\boxed{1}$ D : $-3x+5y+13=0$

Solution détaillée :

On peut faire une figure.

1ère méthode :

Le vecteur $\vec{u}(-3\,;5)$ est un vecteur normal à D.

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

M $\in D \Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{\text{AM}}=0$ $\qquad \overrightarrow{\text{AM}}\left|\begin{matrix}x-1\\y+2\end{matrix}\right.$

$\Leftrightarrow -3\times(x-1)+5\times(y+2)=0$

$\Leftrightarrow -3x+3+5y+10=0$

$\Leftrightarrow -3x+5y+13=0$

2e méthode :

Le vecteur $\vec{u}(-3\,;5)$ est un vecteur normal à D donc D admet une équation cartésienne de la forme $-3x+5y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

On détermine c.

A $\in D$ donc $-3-10+c=0$ d'où c = 13.

Donc <u>une</u> équation cartésienne de D s'écrit : $-3x+5y+13=0$.

Remarque : une droite a une infinité d'équations cartésiennes, une infinité de vecteurs directeurs, une infinité de vecteurs normaux mais n'a qu'une seule équation réduite (de la forme $y=ax+b$ ou $x=k$).

$\boxed{2}$ D : $2x+3y-1=0$

Solution détaillée :

On peut faire une figure.

1ère méthode :

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

M $\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires $\qquad \overrightarrow{\text{CM}}\left|\begin{matrix}x-1\\y+2\end{matrix}\right. \qquad \overrightarrow{\text{AB}}\left|\begin{matrix}x_B-x_A=-3\\y_B-y_A=2\end{matrix}\right.$

$\Leftrightarrow 2\times(x+1)-(-3)\times(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2+3y-3=0$

$\Leftrightarrow 2x+3y-1=0$

2e méthode :

$\overrightarrow{\text{AB}}\left|\begin{matrix}x_B-x_A=-3\\y_B-y_A=2\end{matrix}\right.$ est un vecteur directeur de (AB).

Or D // (AB) donc $\overrightarrow{\text{AB}}$ est aussi un vecteur directeur de D.

Par suite, D admet une équation cartésienne de la forme $2x+3y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

On détermine c.

C $\in D$ donc $-2+3+c=0$ d'où $c=-1$.

Donc <u>une</u> équation cartésienne de D s'écrit : $2x+3y-1=0$.

$\boxed{3}$ D' : $4x-y-17=0$

Solution détaillée :

1ère méthode :

Le vecteur $\vec{u}(-4\,;1)$ est un vecteur directeur de D.

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

M $\in D' \Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{\text{AM}}=0$ $\qquad \overrightarrow{\text{AM}}\left|\begin{matrix}x-5\\y-3\end{matrix}\right.$

$\Leftrightarrow -4\times(x-1)+1\times(y-3)=0$

$\Leftrightarrow -4x+20+y-3=0$

$\Leftrightarrow -4x+y+17=0$

Une équation cartésienne de D' s'écrit $4x-y-17=0$.

2e méthode :

Le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ est <u>un</u> vecteur normal à D donc comme $D\perp D'$, c'est <u>un</u> vecteur directeur de D'.
Par suite, D' admet une équation cartésienne de la forme $4x-y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

On détermine c.

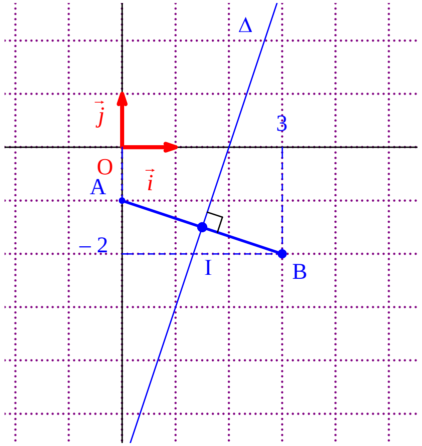
A $\in D'$ donc $4\times5-3+c=0$ d'où $c=-17$.

Donc D' a pour équation $4x-y-17=0$.

$\boxed{4}$ Δ : $3x-y-6=0$

Solution détaillée :

A(3 ; – 2) B(0 ; – 1)



On peut commencer par faire une figure.

Il y a essentiellement deux méthodes.

1$^{\text{ère}}$ méthode : utilisation de la définition de la médiatrice

> **Définition de Δ :**
> Δ est la droite perpendiculaire au segment [AB] en son milieu.

Soit I le milieu de [AB].

Calculons les coordonnées de I.

$$\text{I}\left|\begin{array}{l} x_{\text{I}}=\dfrac{x_{\text{A}}+x_{\text{B}}}{2}=\dfrac{3+0}{2}=\dfrac{3}{2} \\ y_{\text{I}}=\dfrac{y_{\text{A}}+y_{\text{B}}}{2}=\dfrac{-2-1}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$\Delta \perp (\text{AB})$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}(-3\,;1)$ est un vecteur normal à Δ.

Par suite, Δ admet une équation cartésienne de la forme $-3x+y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\text{I}\in\Delta \text{ donc } -3x_{\text{I}}+y_{\text{I}}+c=0 \\ &\qquad -3\times\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+c=0 \\ &\qquad c=6 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit : $-3x+y+6=0$.

Autre façon possible pour cette 1$^{\text{ère}}$ méthode : on utilise un point M(x, y).

Soit I le milieu de [AB].

Calculons les coordonnées de I.

$$\text{I}\left|\begin{array}{l} x_{\text{I}}=\dfrac{x_{\text{A}}+x_{\text{B}}}{2}=\dfrac{3+0}{2}=\dfrac{3}{2} \\ y_{\text{I}}=\dfrac{y_{\text{A}}+y_{\text{B}}}{2}=\dfrac{-2-1}{2}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$$\text{M}\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IM}}=0 \qquad \overrightarrow{\text{AB}}\left|\begin{array}{l}-3\\1\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{\text{IM}}\left|\begin{array}{l}x-\dfrac{3}{2}\\ y+\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -3\times\left(x-\frac{3}{2}\right)+1\times\left(y+\frac{3}{2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow -3x+y+6=0 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit : $\boxed{-3x+y+6=0}$.

2$^{\text{e}}$ méthode : utilisation de la caractérisation de la médiatrice

> Un point appartient à Δ si et seulement si il est équidistant des extrémités.

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan *P*.

$$\begin{aligned} \text{M}\in\Delta &\Leftrightarrow \text{MA}=\text{MB} \\ &\Leftrightarrow \text{MA}^2=\text{MB}^2 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=(x-0)^2+(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+4y+4=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2y+1 \\ &\Leftrightarrow -6x+2y+12=0 \\ &\Leftrightarrow -3x+y+6=0 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit : $\boxed{-3x+y+6=0}$.

$\boxed{5}$ $D:\ ax+by+c=0$
$D':\ a'x+b'y+c'=0$

Il y a plusieurs méthodes possibles. L'une des méthodes possibles consiste à utiliser un vecteur directeur de chacune des deux droites.

On sait que le vecteur $\vec{v}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *D*.

On sait que le vecteur $\vec{v}\,'(-b'\,;a')$ est un vecteur directeur de *D*'.

1°) Démontrons que $D \,//\, D'$ si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

$D \,//\, D' \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -b \times a' - a \times (-b') = 0$$

$$\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

Rappel sur la colinéarité dans un repère :

• Condition nécessaire et suffisante de colinéarité dans un repère quelconque

Deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{u'}(x'\,;y')$ dans le plan muni d'un repère quelconque $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ sont colinéaires si et seulement si $x_{\vec{u}} \times y_{\vec{u'}} - y_{\vec{u}} \times x_{\vec{u'}} = 0$ soit $xy' - yx' = 0$.

• Le nombre $xy' - yx'$ est appelé le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On note $\det(\vec{u}, \vec{u'}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Ainsi, dans un repère, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

2°) Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que *D* et *D'* soient perpendiculaires.

$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v'} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{\vec{v}} \times x_{\vec{v'}} + y_{\vec{v}} \times y_{\vec{v'}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -b \times (-b') + a \times a' = 0$$

$$\Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Retenir

$\vec{u}(x\,;y)$	$\vec{u'}(x'\,;y')$
$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires $\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$	
$\vec{u} \perp \vec{u'} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$	

$\boxed{6}$ 1°) $m = 2$ 2°) $m = \dfrac{1}{9}$

Solution détaillée :

On sait que le vecteur $\vec{u}(3m-1\,;m+1)$ est un vecteur directeur de D_m et que le vecteur $\vec{v}(m+1\,;1-3m)$ est un vecteur normal à D_m.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = 0 - 6 = -6 \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = 2 + 8 = 10 \end{array} \right.$$

Attention : une grosse perte de temps consisterait à chercher une équation de (AB).

1°)

$D_m \perp (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} + y_{\vec{u}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3m-1) \times (-6) + (m+1) \times 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -18m + 6 + +10m + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8m + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2$$

2°)

$D_m \,//\, (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{\vec{v}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} + y_{\vec{v}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1) \times (-6) + (1-3m) \times 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6m - 6 + 10 - 30m = 0$$

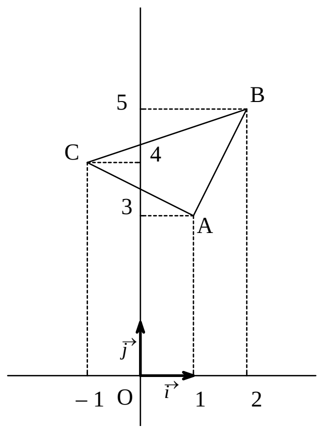
$$\Leftrightarrow -36m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-4}{-36}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{9}$$

On n'a pas utilisé la relation sur le produit des coefficients directeurs de deux droites (« deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à – 1 ») car on connaît une équation cartésienne de D_m. Pour passer cette équation cartésienne en équation réduite, cela supposerait de regarder pour quelle valeur de m la droite D_m est parallèle à l'axe des ordonnées.

$\boxed{7}$ **Faire une figure.**



1°) $AB = AC = \sqrt{5}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$. On en déduit que ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
2°) $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - x - 9y + 18 = 0$ (on utilise que, comme ABC est rectangle en A, son hypoténuse est un diamètre de $\mathcal{C}$).

Solution détaillée :

1°)

$$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A = 2 - 1 = 1 \\ y_B - y_A = 5 - 3 = 2 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} x_C - x_A = -1 - 1 = -2 \\ y_C - y_A = 4 - 3 = 1 \end{vmatrix}$$

$$AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

On a : $AB = AC = \sqrt{5}$ donc ABC est isocèle en A.

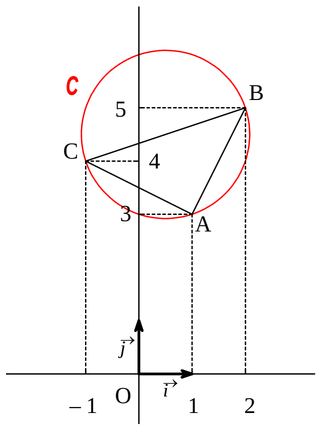
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 1 \times (-2) + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux. Par suite, (AB) ⊥ (AC).

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

N.B. : On pourrait aussi calculer la distance BC. En appliquant, la réciproque du théorème de Pythagore, on démontrerait alors que le triangle ABC est rectangle en A.

2°)



Le triangle ABC est rectangle en A donc son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ a pour diamètre l'hypoténuse [BC].

Soit M(*x*, *y*) un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{MC} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{MC} = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{MB}} \times x_{\overrightarrow{MC}} + y_{\overrightarrow{MB}} \times y_{\overrightarrow{MC}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_B - x_M) \times (x_C - x_M) + (y_B - y_M) \times (y_C - y_M) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 - x) \times (-1 - x) + (5 - y) \times (4 - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 9y + 18 = 0 \end{aligned}$$

Autre méthode (plus longue et plus maladroite) :

On calcule les coordonnées du milieu I de [BC] qui est le centre du cercle $\mathcal{C}$.
On calcule la longueur BC. On en déduit le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

On applique la formule donnant l'équation d'un cercle de centre Ω(*a*, *b*) et de rayon *r* : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

$\boxed{8}$ 1°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-1)$ et de rayon $\sqrt{13}$.
2°) L'équation réduite de $\mathcal{D}$ s'écrit $y = -2x + 2$.
On forme une équation donnant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en remplaçant le *y* par $-2x + 2$.

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ s'écrit : $5x^2 - 16x = 0$.

Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{I\,;J\}$ avec $I(0\,;2)$ et $J\left(\dfrac{16}{5}\,;\,-\dfrac{22}{5}\right)$.

Solution détaillée :

1°) On met l'équation du cercle sous forme canonique.

Soit M(*x*, *y*) un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 13 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 13 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;\,-1)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

2°) $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $2x + y - 2 = 0$ donc $\mathcal{D}$ a pour équation réduite $y = -2x + 2$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont solutions de l'équation
$(x - 2)^2 + (-2x + 2 + 1)^2 = 13$ (1)

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (-2x + 3)^2 = 13 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 13 = 13 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 16x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(5x - 16) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{\text{I} ; \text{J}\}$ avec $\text{I}(0 ; 2)$ et $\text{J}\left(\dfrac{16}{5} ; -\dfrac{22}{5}\right)$.

On calcule les ordonnées des points I et J grâce à l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$.

N.B. : On peut vérifier avec *Geogebra*.

9 $\mathcal{D}$ est le disque fermé (en effet, comme l'inégalité est large, tous les points du cercle sont compris dans l'ensemble ; on parle alors du disque fermé) de centre $\Omega(4 ; -2)$ et de rayon 2.

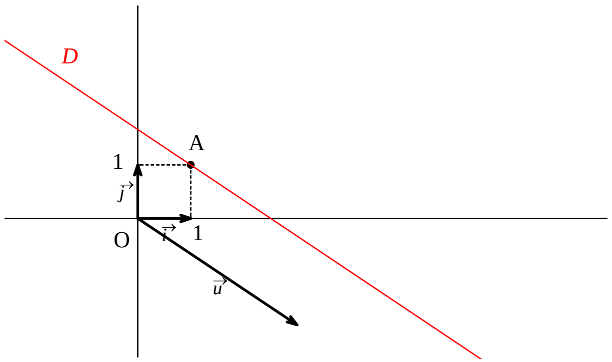
Solution détaillée :

Soit M(x, y) un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} \text{M} \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \Omega\text{M}^2 \leq 4 \text{ où } \Omega \text{ est le point de coordonnées } (4 ; -2) \\ &\Leftrightarrow \Omega\text{M} \leq 2 \end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ est le disque fermé (en effet, comme l'inégalité est large, tous les points du cercle sont compris dans l'ensemble ; on parle alors du disque fermé) de centre Ω(4 ; – 2) et de rayon 2.

10 D est la droite passant par A(1 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}(3 ; -2)$.



11 1°) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ 2°) $3x - 4y = 0$

Solution détaillée :

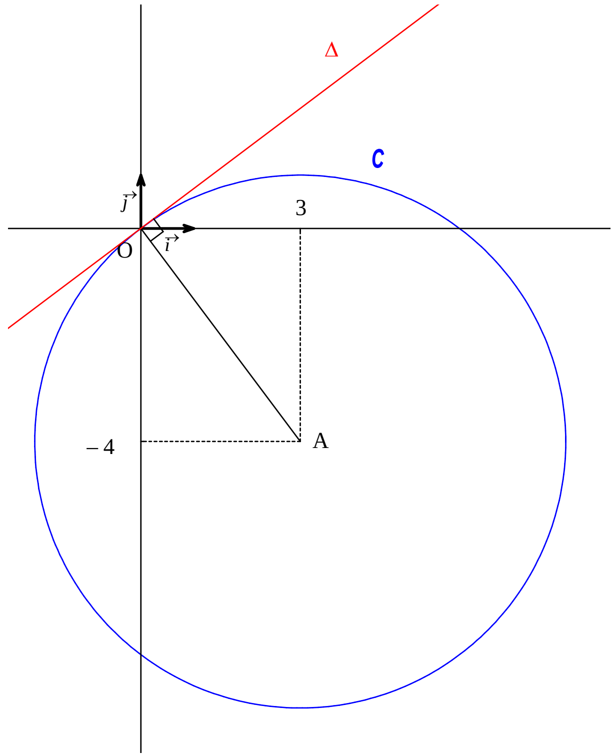
1°) On calcule la distance OA (pour avoir le rayon du cercle).

$$\overrightarrow{\text{OA}} \left| \begin{aligned} x_{\text{A}} - x_{\text{O}} &= 3 \\ y_{\text{A}} - y_{\text{O}} &= -4 \end{aligned} \right.$$

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ s'écrit $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ donc $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

2°) La tangente en O à $\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire à (OA) passant par O.

$\Delta \perp$ (OA) donc le vecteur $\overrightarrow{\text{OA}}$ est un vecteur normal à Δ.



Donc Δ admet une équation cartésienne de la forme $3x - 4y + c = 0$.

Or O ∈ Δ donc $3x_{\text{O}} - 4y_{\text{O}} + c = 0$ d'où $c = 0$.

Δ a pour équation cartésienne $3x - 4y = 0$.

12 1°) $\text{d}(\text{A}, D) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ 2°) $\mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{9}{2}$

Solution détaillée :

1°) On applique la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite.

$$\mathrm{d}(A, D)=\frac{|1\times3-1\times(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

2°) Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre A et est tangent à *D* donc son rayon est égal à la distance du point A à la droite *D*.

Une équation de $\mathcal{C}$ s'écrit donc $(x-3)^2+(y+1)^2=\frac{9}{2}$.

$\boxed{13}$ $D:\ y=-2x+5$

D a pour équation cartésienne $2x + y - 5 = 0$.

On applique la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite.

$$\mathrm{d}(O, D)=\frac{|2x_O+y_O-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|2\times0+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\boxed{14}$ 1°) $3x - 4y - 7 = 0$ 2°) $\mathrm{d}(A,(BC))=\frac{19}{5}$; $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{BC\times\mathrm{d}(A,(BC))}{2}=...=\frac{19}{2}$ u.a.

$\boxed{15}$ 1°) $y=mx-2m-2$

2°) $\mathrm{d}(A, D_m)=\frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$

3°) On traduit : $\mathrm{d}(A, D_m)=2$.

D_m est tangente à $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow \mathrm{d}(A, D_m)=2$

$\Leftrightarrow \frac{|m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$\Leftrightarrow |m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow (|m-2|)^2=\left(2\sqrt{m^2+1}\right)^2$ (l'équivalence est bien conservée lorsque l'on élève les deux membres au carré, car les deux membres sont positifs ou nuls)

$\Leftrightarrow (m-2)^2=4(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2-4m+4=4(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2-4m+4=4m^2+4$

$\Leftrightarrow 3m^2+4m=0$

$\Leftrightarrow m(3m+4)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ \text{ou} \\ 3m+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ \text{ou} \\ m=-\frac{4}{3} \end{cases}$

On obtient : $m = 0$ ou $m=-\frac{4}{3}$.

$\boxed{16}$ 1°) Une équation cartésienne de la droite (AB) s'écrit $3x + 5y - 15 = 0$.
2°) L'intérieur du triangle OAB (frontières comprises) est l'intersection des demi-plans P_1, P_2, P_3 ainsi définis :

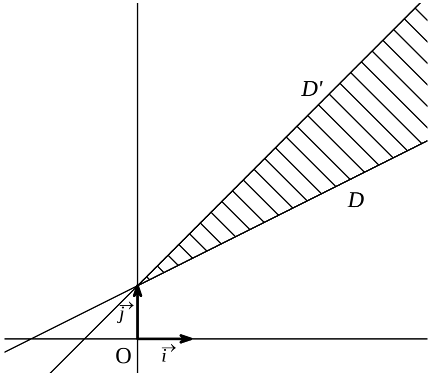
P_1 : demi-plan fermé de frontière (OA) contenant B ;
P_2 : demi-plan fermé de frontière (OB) contenant A ;
P_3 : demi-plan fermé de frontière (AB) contenant O.

La droite (OA) est l'axe des abscisses et a pour équation $y=0$; P_1 est caractérisé par l'inéquation $y\geq0$.
La droite (OB) est l'axe des ordonnées et a pour équation $x=0$; P_2 est caractérisé par l'inéquation $x\geq0$.
La droite (AB) a pour équation $3x+5y-15=0$; P_3 est caractérisé par l'inéquation $3x+5y-15\leq0$ car $3x_O+5y_O-15\leq0$.

L'intérieur du triangle OAB (frontières comprises) est donc caractérisé par le système $\begin{cases} x\geq0 \\ y\geq0 \\ 3x+5y-15\leq0 \end{cases}$.

$\boxed{17}$ Écrire la double inéquation en deux parties : $\frac{x}{2}+1<y$ et $y<x+1$.

On trace les droites *D* et *D'* d'équations respectives $y=\frac{x}{2}+1$ et $y=x+1$.



L'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $\frac{x}{2}+1<y<x+1$ est représenté par la zone hachurée (frontières non comprises).

Le plan muni d'un repère orthonormé

On note *P* l'ensemble des points du plan et $\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

I. Expression analytique du produit scalaire

1°) Remarque préliminaire

Dans tout le chapitre, $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère **orthonormé** du plan *P*.

H_1 : $\vec{i}\perp\vec{j}$

H_2 : $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ (pour l'unité de longueur choisie)

On dit que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **normés** ou **unitaires**.

2°) Propriété

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{P}$.

$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'$

3°) Démonstration

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\bullet\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$$
$$=xx'\underbrace{\vec{i}^2}_{1\ (\mathrm{H}_2)}+xy'\underbrace{\vec{i}\bullet\vec{j}}_{0\ (\mathrm{H}_1)}+yx'\underbrace{\vec{i}\bullet\vec{j}}_{0\ (\mathrm{H}_1)}+yy'\underbrace{\vec{j}^2}_{1\ (\mathrm{H}_2)}$$
$$=xx'+yy'$$

II. Distance et orthogonalité

1°) Norme d'un vecteur

$\vec{u}(x\,;y)$ est un vecteur quelconque de $\vec{P}$.

$$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

2°) Distance de deux points

$\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B}\right)$ sont deux points quelconques de *P*.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l}x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\end{array}\right.$

Donc $\mathrm{AB}=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|=\sqrt{\left(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\right)^2+\left(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\right)^2}$

3°) Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux vecteurs

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{P}$.