TS

Exercices sur les nombres complexes (2)

1 Calculer les modules des nombres complexes suivants $z_1=-4+i\sqrt{3}$; $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}i$; $z_3=-6i$.

2 Calculer le module des nombres complexes suivants **en utilisant les propriétés des modules**.

$z_1=\left(\sqrt{6}+i\right)\left(5+i\sqrt{3}\right)$; $z_2=\left(\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right)^2$; $z_3=(1+2i)^3$; $z_4=\dfrac{53+i}{53-i}$; $z_5=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^4$.

3 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A (– 1 + i), B(2 + 2i) et C(4i).
Calculer AB et AC ; en déduire la nature de ABC.

4 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ et $z_3=2i$.
1°) Démontrer que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle de centre O.
Faire une figure en prenant deux centimètres (ou deux « gros » carreaux) pour unité de longueur.
2°) Démontrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

5 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, déterminer et tracer

- l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $|z+4-i|=2$;
- l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $|z-2|=|z+3i|$;
- l'ensemble E_3 des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-1+2i|=5$;
- l'ensemble E_4 des points M d'affixe z tels que $|z-1+i|\leq 3$.

Faire une figure pour chaque ensemble.

6 On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.
À tout point M du plan complexe d'affixe $z\neq i$, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z+2}{z-i}$.
On note A et B les points d'affixes respectives – 2 et i.

1°) Démontrer que $|z'|=\dfrac{MA}{MB}$.

2°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan tels que $|z'|=1$.

Corrigés

1 $|z_1|=\sqrt{19}$; $|z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$; $|z_3|=6$

Solution détaillée :

On applique la formule qui définit le module d'un nombre complexe :

> **Le module d'un nombre complexe $a+ib$ où a et b sont deux réels est le nombre $\sqrt{a^2+b^2}$.**

Consigne de soin : tirer les traits de fraction à la règle.

$z_1=-4+i\sqrt{3}$

$$|z_1|=\sqrt{(-4)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16+3}=\sqrt{29}$$

$z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}i$

$$|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$z_3=-6i$

$$|z_3|=\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6$$

2 $|z_1|=14$; $|z_2|=9$; $|z_3|=5\sqrt{5}$; $|z_4|=1$; $|z_5|=4$.

Solution détaillée :

On applique les propriétés du module.

- $z_1=\left(\sqrt{6}+i\right)\left(5+i\sqrt{3}\right)$

On applique la propriété : « Le module d'un produit est le produit d'un produit ».

$$|z_1|=\left|\sqrt{6}+i\right|\times\left|5+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+1^2}\times\sqrt{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{7}\times\sqrt{28}=\sqrt{7}\times\sqrt{28}=\sqrt{7}\times2\sqrt{7}=2\times7=14$$

- $z_2=\left(\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right)^2$

On applique la propriété : « Le module d'un carré est le carré du module » (cas particulier du module d'une puissance).

$$|z_2|=\left|\left(\sqrt{6}+i\sqrt{3}\right)^2\right|=\left|\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\right|^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\sqrt{3}^2}\right)^2=\left(\sqrt{9}\right)^2=9$$

- $z_3 = (1+2i)^3$

On applique la propriété du module d'une puissance.

$|\,z_3\,| = \left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5}$

- $z_4 = \dfrac{53+i}{53-i}$

On applique la propriété : « Le module d'un complexe est égal au module de son conjugué ».

$|\,z_4\,| = \left|\dfrac{53+i}{53-i}\right| = \dfrac{|53+i|}{|53-i|} = \dfrac{|53+i|}{|53+i|} = 1$

On peut écrire $|\,z_4\,| = \left|\dfrac{53+i}{53-i}\right| = \dfrac{\sqrt{53^2+1^2}}{\sqrt{53^2+1^2}} = 1$ mais ce n'est pas vraiment utile.

- $z_5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^4$

On applique les propriétés du module d'une puissance et du module d'un quotient.

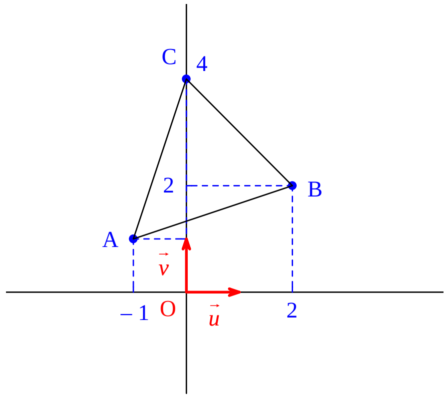
$|\,z_5\,| = \left|\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right|^4 = \left(\dfrac{|\sqrt{3}+i|}{|1+i|}\right)^4 = \left(\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^4 = \left(\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{\dfrac{4}{2}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$

$\boxed{3}$ A (– 1 + i), B(2 + 2i) ; C(4i)

$AB = |\,z_B - z_A\,| = |\,2+2i-(-1+i)\,| = |\,3+i\,| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$AC = |\,z_C - z_A\,| = |\,4i-(-1+i)\,| = |\,1+3i\,| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

On a : AB = AC = $\sqrt{10}$ donc le triangle ABC est isocèle en A.



$\boxed{4}$ $M_1\left(z_1 = \sqrt{3} - i\right)$, $M_2\left(z_2 = \sqrt{3} + i\right)$, $M_3\left(z_3 = 2i\right)$

1°) Démontrons que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle de centre O.

On calcule donc les distances OM_1, OM_2 et OM_3.

$OM_1 = \|\,z_1\,\|$ $= \|\,\sqrt{3}-i\,\|$ $= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}$ $= \sqrt{4}$ $= 2$	$OM_2 = \|\,z_2\,\|$ $= \|\,\sqrt{3}+i\,\|$ $= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}$ $= \sqrt{4}$ $= 2$	$OM_3 = \|\,z_3\,\|$ $= \|\,2i\,\|$ $= \sqrt{4}$ $= 2$

On a donc $OM_1 = OM_2 = OM_3 = 2$.
Par suite, on en déduit que les points sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2.

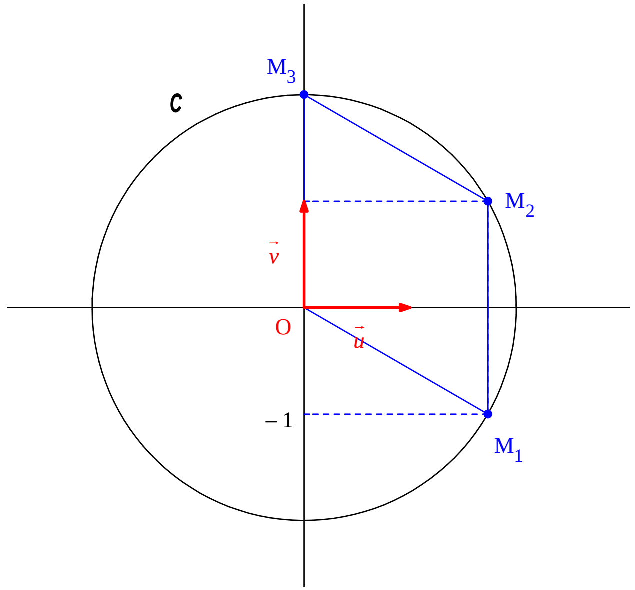
Rappel : le point O a pour affixe 0.

Pour la figure, on sait que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Comme leurs abscisses sont positives, ils appartiennent tous les deux au demi-cercle situé à droite de l'axe des ordonnées.

M_1 a pour ordonnée – 1 ce qui permet de placer M_1 précisément sur le cercle.
M_2 a pour ordonnée 1 ce qui permet de placer M_2 précisément sur le cercle.

Figure :



2°) Démontrons que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Rappels :

• **Définition du losange**

Un losange est un quadrilatère dont les côtés sont de même longueur.

• **Propriété caractéristique**

Un losange est un parallélogramme qui possède deux côtés consécutifs de même longueur.

1ère méthode : utilisation de la définition

On calcule les quatre longueurs OM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3O à l'aide des modules.
On constate que ces quatre longueurs sont égales à 2.
On en déduit que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est losange.

2e méthode : utilisation de la propriété caractéristique

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme avec des affixes, on démontre que deux vecteurs sont égaux.

$z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{M_1} - z_O = z_1 - 0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

$z_{\overrightarrow{M_3M_2}} = z_{M_2} - z_{M_3} = z_2 - z_3 = \sqrt{3} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

Donc $z_{\overrightarrow{OM_1}} = z_{\overrightarrow{M_3M_2}}$ d'où $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$.

Donc le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme.

De plus, d'après la question 1°), on a : $OM_1 = OM_3 = 2$.

On en déduit que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est losange.

N.B. : Il ne s'agit pas d'un carré ; ça saute aux yeux sur la figure ; la démonstration est facile (mais l'énoncé demande juste de démontrer que c'est un losange donc ce n'est pas la peine d'en faire trop).
Les points M_1, M_2, M_3 appartiennent tous au cercle de centre O et de rayon 2 donc il n'est pas possible que $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

5 Recherche d'ensembles de points

• L'ensemble E_1 est le cercle de centre Ω (– 4 + i) et de rayon 2.
• L'ensemble E_2 est la médiatrice du segment [AB] avec A(2) et B(– 3i).
• L'ensemble E_3 est le cercle de centre Ω (1 + 2i) et de rayon 5.
• L'ensemble E_4 est le disque fermé de centre avec Ω (1 – i) et rayon 3.

Solution détaillée :

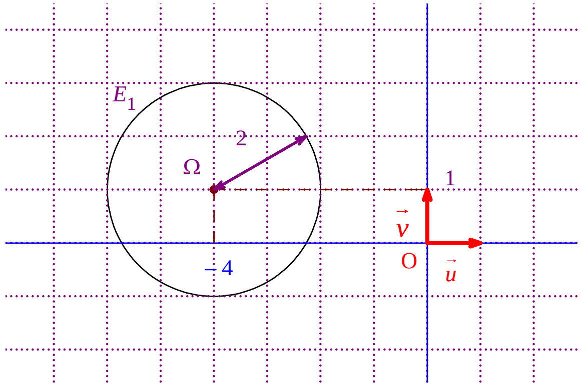
★ $\mathrm{M}(z) \in E_1 \Leftrightarrow |z + 4 - \mathrm{i}| = 2$

$\Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 2$ avec Ω (– 4 + i)

$\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\Omega M}}| = 2$

$\Leftrightarrow \Omega M = 2$

L'ensemble E_1 est le cercle de centre Ω (– 4 + i) et de rayon 2.



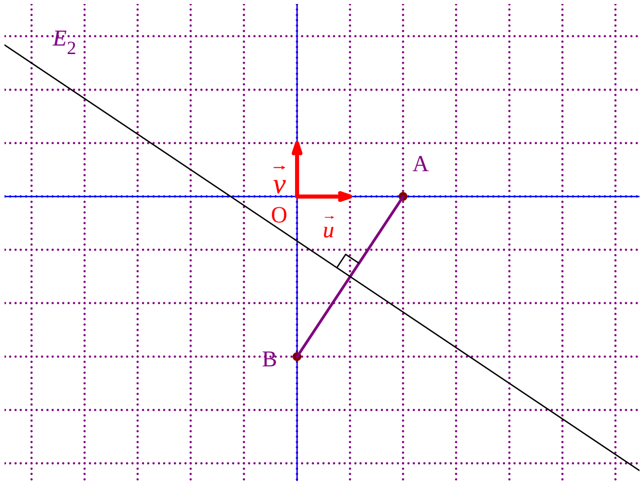
★ $\mathrm{M}(z) \in E_2 \Leftrightarrow |z-2| = |z+3\mathrm{i}|$

$\Leftrightarrow |z - z_\mathrm{A}| = |z - z_\mathrm{B}|$ avec A(2) et B(– 3i)

$\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}| = |z_{\overrightarrow{\mathrm{BM}}}|$

$\Leftrightarrow$ AM = BM

L'ensemble E_2 est la médiatrice du segment [AB] avec A(2) et B(– 3i).



★ $\mathrm{M}(z) \in E_3 \Leftrightarrow |\bar{z} - 1 + 2\mathrm{i}| = 5$ utilisation du conjugué

$\Leftrightarrow |\overline{z-1-2\mathrm{i}}| = 5$

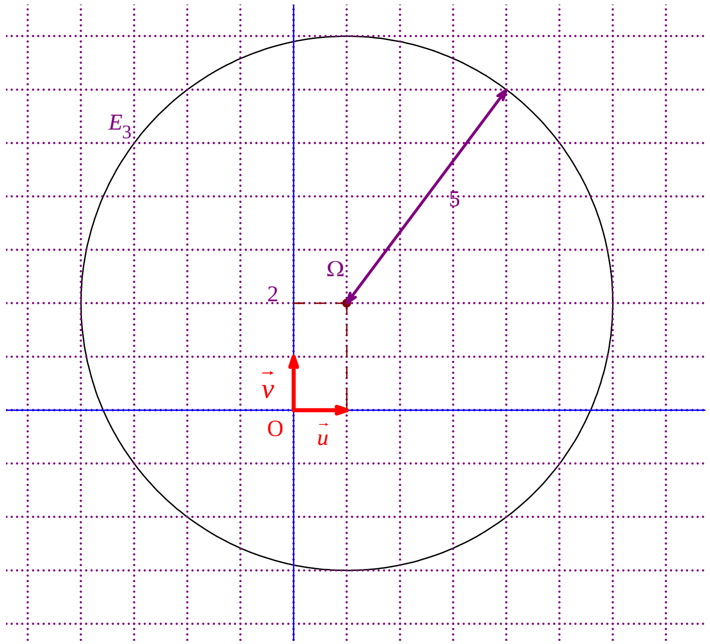
(en effet, $-1+2\mathrm{i} = \overline{-1-2\mathrm{i}}$ et le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués)

$\Leftrightarrow |z-1-2\mathrm{i}| = 5$ (le module du conjugué d'un nombre complexe est égal au module de ce nombre)

$\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}}| = 5$ avec Ω (1 + 2i)

$\Leftrightarrow$ ΩM = 5

L'ensemble E_3 est le cercle de centre Ω (1 + 2i) et de rayon 5.



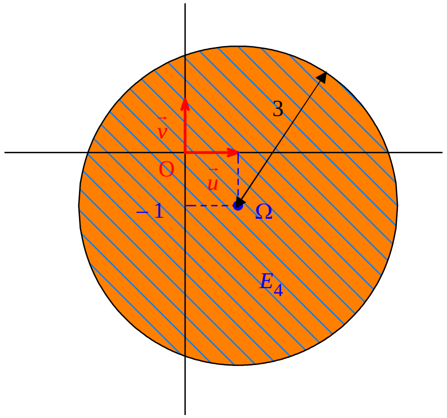
L'idée est de se débarrasser de la barre de conjugaison au-dessus de *z*.

★ $M(z) \in E_4 \Leftrightarrow |z-1+i| \leq 3$

$\Leftrightarrow |z_{\overrightarrow{\Omega M}}| \leq 3$ avec Ω (1 – i)

$\Leftrightarrow \Omega M \leq 3$

L'ensemble E_4 est le disque fermé de centre Ω (1 – i) et rayon 3.



$\boxed{6}$ 1°) On a : $z' = \dfrac{z+2}{z-i} = \dfrac{z-(-2)}{z-i} = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$

On a donc : $|z'| = \left|\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right| = \dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = \dfrac{MA}{MB}$

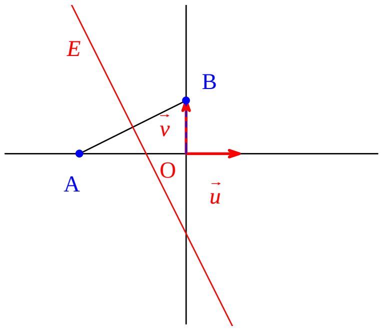
2°) Déterminons l'ensemble E des points M du plan tels que $|z'| = 1$.

$M \in E \Leftrightarrow |z'| = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{MA}{MB} = 1$

$\Leftrightarrow$ MA = MB

Conclusion : *E* est la médiatrice du segment [AB].



Tracé au compas ou à l'équerre.

Classification des exercices par compétences

Compétences	Exercices
Calculer le module d'un nombre complexe en utilisant la définition	$\boxed{1}$.
Utiliser les propriétés du module	$\boxed{2}$.
Utiliser le module en géométrie (calculs de longueurs, ensembles de points…)	$\boxed{3}$ à $\boxed{5}$.