TS

Exercices sur les expériences aléatoires répétées

On rédigera très soigneusement chaque exercice. Le modèle est rappelé dans l'exercice **1**.
La plupart du temps, on donnera les résultats sous forme décimale, éventuellement en arrondissant.

1 Dans une loterie, une roue présente des secteurs gagnants. A chaque lancer de roue, la probabilité de gagner est 0,1 et ne dépend pas du lancer précédent.
On joue quatre fois de suite.
Calculer, en rédigeant selon le modèle ci-dessous, la probabilité
- de gagner exactement une fois ;
- de gagner au moins une fois.

L'épreuve « lancer la roue » est une **épreuve de Bernoulli** modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

soit à un succès S : « tomber sur un secteur gagnant » $P(\text{S}) = ...$

soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « tomber sur un secteur perdant » $P(\overline{\text{S}}) = ...$

On répète cette épreuve quatre fois dans des **conditions identiques indépendantes**.
Il s'agit donc d'un **schéma de Bernoulli**.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre lancers.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$(… ; ….).
On note E l'événement : « gagner exactement une fois ».

$P(\text{E}) = P(\text{X} = ...)$

$= \ldots$

On note F l'événement : « gagner au moins une fois ».

$P(\text{F}) = \ldots$

2 Une usine fabrique des pièces en grande série dont 5 % sont défectueuses.
On en prélève quatre au hasard.
On admettra que, vu le grand nombre de pièces, ce tirage peut être assimilé à quatre tirages successifs avec remise (donc indépendants).
Quelle est la probabilité que deux pièces exactement soient défectueuses ?

3 On lance un dé non truqué cinq fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois le numéro 6 ?

4 Un joueur de basket sait qu'à chaque tir au panier sa probabilité de succès est 0,8.
Au cours d'un entraînement, il envisage quatre lancers successifs indépendants.
Quelle est la probabilité que le joueur réussisse

- au moins un panier ?
- au moins trois paniers ?

5 Une urne contient cinq boules noires et trois boules blanches.
On tire une boule au hasard trois fois de suite avec remise.
Calculer la probabilité de tirer exactement deux fois une boule blanche.

6 Un tireur à l'arc envoie quatre flèches sur une cible.
On admet que chaque tir est indépendant des précédents et que pour chaque tir la probabilité d'atteindre la cible est 0,75.
Calculer la probabilité d'atteindre
1°) exactement trois fois la cible
2°) au moins une fois la cible.
Donner les valeurs exactes des résultats sous forme décimale.

7 Un Q.C.M. comporte dix questions offrant chacune trois réponses possibles. Il n'y a chaque fois qu'une réponse exacte. On répond complètement au hasard.
Quelle est la probabilité
1°) d'obtenir exactement deux réponses exactes ?
2°) d'obtenir au moins cinq réponses exactes ?

8 La probabilité de gagner à un jeu est $\frac{1}{5}$.
En faisant cinq parties successives et indépendantes, quelle est la probabilité d'avoir gagné au moins une fois ?

9 On lance n fois une pièce non truquée $(n \in \mathbb{N}^*)$.
1°) Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un pile parmi les n lancers.
2°) Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $p_n \geqslant 0{,}999$.

10 Un joueur atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,3.
Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité qu'il atteigne sa cible au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99 ?

11 Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une population donnée, la fréquence de naissance d'une fille est de 45 %. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent.
On s'intéresse au nombre de filles dans une famille de cinq enfants. On note X le nombre de filles dans ces familles.
1°) Quel est le nom de la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses caractéristiques.
2°) Calculer $E(\text{X})$, $V(\text{X})$ et $\sigma(\text{X})$.

12 Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3. On admet qu'à chaque lancer on atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants.
Pour un joueur, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont respectivement $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{12}$.
Les résultats demandés seront donnés sous forme de **fractions irréductibles**.
Le joueur lance la fléchette trois fois de suite. Les trois lancers sont indépendants.
1°) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
2°) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 sans tenir compte de l'ordre ? (faire une liste).

13 Un tournoi oppose deux équipes A et B qui jouent trois parties successives d'un même jeu. Le vainqueur du tournoi est l'équipe qui a gagné le plus de parties. Chaque partie est notée respectivement A, B ou N suivant que l'équipe A gagne, B gagne ou la partie est nulle.
A chaque partie, l'équipe A a une probabilité de 0,5 de gagner, l'équipe B a une probabilité de 0,4 de gagner et la probabilité pour que la partie soit nulle vaut 0,1.

1°) Faire un arbre de choix.
2°) Calculer la probabilité pour que le tournoi soit sans vainqueur.
3°) a) Calculer la probabilité pour que l'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et remporte le tournoi.
b) Calculer la probabilité pour que l'équipe A soit vainqueur du tournoi.
4°) Sachant que l'équipe B est vainqueur du tournoi, calculer la probabilité que l'équipe B ait gagné exactement deux parties.

14 Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé.
Les tirs successifs sont indépendants.
1°) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
2°) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon c'est-à-dire que le ballon soit crevé au premier tir ou au second tir ?
3°) Quelle est la probabilité pour que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

Réponses

1 L'épreuve « lancer la roue » est une épreuve de Bernoulli.
$P(\text{E})=0{,}2916$; $P(\text{F})=0{,}3439$

2 L'épreuve « prélever une pièce » est une épreuve de Bernoulli.
$P(\text{"deux pièces exactement sont défectueuses"})=0{,}0135375$

3 L'épreuve « lancer le dé » est une épreuve de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où l'on obtient le numéro 6.
X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{1}{6}$

$$P(\text{"obtenir exactement deux fois le numéro 6"})=P(\text{X}=2)=\binom{5}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=10\times\frac{5^3}{6^5}=\frac{625}{3888}$$

4 X suit la loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}8$.
$P(\text{"le joueur réussit au moins un panier"})=0{,}998$;
$P(\text{"le joueur réussit au moins trois paniers"})=P(\text{X}\geq 3)=P(\text{X}=3)+P(\text{X}=4)=0{,}8192$

On a : $P(\text{X}=3)=\binom{4}{3}\times(0{,}8)^3\times 0{,}2^1$; $P(\text{X}=4)=\binom{4}{4}\times(0{,}8)^4\times 0{,}2^0$

5 Loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{3}{8}=0{,}375$.
$P(\text{"obtenir exactement deux fois une boule blanche"})=0{,}263671875$

6 Loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0{,}75$.
1°) $P(\text{"atteindre exactement trois fois la cible"})=P(\text{X}=3)=0{,}421875$
2°) $P(\text{"atteindre au moins une fois la cible"})=P(\text{X}\geq 1)=0{,}99609375$

7 Loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{3}$.

1°) $P(\text{"obtenir exactement deux réponses exactes"})=\binom{10}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^8=45\times\frac{2^8}{3^{10}}=0{,}1950...$

2°) $P(\text{"obtenir au moins cinq réponses exactes"})=0{,}213108...$

8 $P(\text{"gagner au moins une fois"})=\frac{2101}{3125}$

9 1°) Il n'est pas nécessaire de parler de schéma de Bernoulli ni de loi binomiale. $p_n=1-\frac{1}{2^n}$
2°) Le plus petit entier naturel n non nul tel que $p_n\geq 0{,}999$ est 10.
On utilise le logarithme népérien ou le logarithme décimal.

10 On pose cherche les entiers naturels n tels que $1-0{,}7^n\geq 0{,}99$ ce qui conduit $0{,}7^n\leq 0{,}01$.
En utilisant le logarithme népérien, on aboutit : $n\geq\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7}$.
D'après la calculatrice, on a : $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7}=12{,}91...$
Il « faut » tirer au moins 13 fois pour que la probabilité qu'il atteigne sa cible au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99.

11 1°) X suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}45$ notée **B** (5 ; 0,45) (inutile de faire un tableau ici ; on donne juste le nom de la loi de probabilité).
On pose $q=1-p=1-0{,}45=0{,}55$.
2°) On applique les formules du cours donnant l'espérance et la variance d'une loi binomiale ;
$E(\text{X})=n\times p=2{,}25$; $V(\text{X})=n\times p\times q=1{,}2375$.

12 Dans cet exercice, il n'y a pas de loi binomiale ni de schéma de Bernoulli. On utilise juste le **principe multiplicatif.**
1°) $P(\text{"le joueur atteint trois fois la case 3"})=\frac{343}{1\,728}$
2°) $P(\text{"le joueur atteint les cases 1, 2, 3 dans n'importe quel ordre"})=\frac{7}{72}=0{,}09722...$

13 Dans cet exercice, il n'y a pas de loi binomiale ni de schéma de Bernoulli. **On utilise juste le principe multiplicatif.**

1°) 2°) E : « Le tournoi est sans vainqueur ».
On écrit tous les résultats possibles dans ce cas :
NNN ; ABN ; ANB ; BAN ; BNA ; NAB ; NBA

Par indépendance, on applique le principe multiplicatif.
$P(\text{E})=6(0{,}1\times 0{,}5\times 0{,}4)+(0{,}1)^3=0{,}121$

3°) a) F : « L'équipe A gagne exactement une partie du tournoi et le remporte ».

Les possibilités pour F sont : ANN ; NAN ; NNA.

$P(F)=3\times\left[0{,}5\times(0{,}1)^2\right]=0{,}015$

b) G : « l'équipe A est vainqueur du tournoi ».

Les résultats qui correspondent à G sont :
AAA ; AAB ; ABA ; ANA ; ANN ; AAN ; BAA ; NAA ; NAN ; NNA.
$P(\text{G})=3\times(0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}4)+3\times(0{,}1\times 0{,}1\times 0{,}5)+3\times(0{,}5\times 0{,}1\times 0{,}5)+(0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5)=0{,}515$

4°) On note H l'événement : « l'équipe B est vainqueur du tournoi ».
et I l'événement : « l'équipe B a gagné exactement deux parties ».

On cherche $P(\text{I/H})$.

On a : $P(\text{I/H})=\frac{P(\text{I}\cap\text{H})}{P(\text{H})}$

Or : $P(\mathrm{I}\bigcap\mathrm{H}) = P(\mathrm{I})$ car $\mathrm{I}\bigcap\mathrm{H} = \mathrm{I}$ (car l'événement I est inclus dans H : si l'équipe B a gagné exactement deux parties, alors l'équipe B est vainqueur du tournoi).

$$P(\mathrm{I/H}) = \frac{P(\mathrm{I})}{P(\mathrm{H})}$$

● Calcul de *P*(I)

Les résultats correspondant à l'événement I : « l'équipe B a gagné exactement deux parties » sont :
ABB – BAB – BBA – BNB – NBB – BBN (il y a en tout 6 résultats possibles)

$$P(\mathrm{I}) = 3\times(0{,}4\times0{,}4\times0{,}5)+3\times(0{,}4\times0{,}4\times0{,}1)$$

$P(\mathrm{I}) = 0{,}288$

● Calcul de *P*(H)

1ère méthode :

Les résultats correspondant à l'événement H : « l'équipe B est vainqueur du tournoi » sont :
ABB – BAB – BBA – BBB – BBN – BNB – BNN – NBB – NBN – NNB (il y a en tout 10 résultats possibles)

$$P(\mathrm{H}) = 3\times(0{,}4\times0{,}4\times0{,}5)+(0{,}4)^3+3\times(0{,}4\times0{,}4\times0{,}1)+3\times(0{,}1\times0{,}1\times0{,}4)$$

$$P(\mathrm{H}) = 0{,}3654$$

2e méthode :

Comme on a calculé la probabilité d'obtenir un match nul et que l'équipe A vainqueur du tournoi, on peut aussi calculer la probabilité que l'équipe B soit vainqueur du tournoi, en faisant

$$P(\mathrm{H}) = 1-P(\mathrm{E})-P(\mathrm{G})$$

$$P(\mathrm{I/H}) = \frac{0{,}288}{0{,}3654} \approx 0{,}79$$

N.B. :
De manière évidente on a : $P(\mathrm{H/I}) = 1$ car si l'équipe B a gagné exactement deux parties, alors l'équipe B est vainqueur du tournoi.

$\boxed{\textbf{14}}$ 1°) $P(\text{"le ballon est intact au bout de deux tirs"}) = 0{,}8^2 = 0{,}64$

2°) L'événement considéré est le contraire du précédent ; $1-0{,}64 = 0{,}36$.

3°) $p_n = 1-0{,}8^n$.

Solutions détaillées

1 L'épreuve « lancer la roue » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « tomber sur un secteur gagnant » $P(\text{S}) = 0{,}1$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « tomber sur un secteur perdant » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}9$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre lancers.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}1)$.

On note E l'événement « gagner exactement une fois ».

$$P(\text{E}) = P(\text{X} = 1) = \binom{4}{1} \times 0{,}1 \times 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

On note F l'événement « gagner au moins une fois ».

$$\begin{aligned} P(\text{F}) &= P(\text{X} \geq 1) \\ &= 1 - P(\text{X} < 1) \\ &= 1 - P(\text{X} = 0) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^4 \\ &= 0{,}3439 \end{aligned}$$

2 L'épreuve « prélever une pièce » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « la pièce est défectueuse » $P(\text{S}) = 0{,}05$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « la pièce n'est pas défectueuse » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}95$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des quatre prélèvements (c'est-à-dire le nombre de pièces défectueuses).
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}05)$.
On note E l'événement « obtenir exactement deux pièces défectueuses ».

$$P(\text{E}) = \binom{4}{2} \times 0{,}05^2 \times 0{,}95^2 = 0{,}0135375$$

3 L'épreuve « lancer le dé » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « avoir un 6 » $P(\text{S}) = \frac{1}{6}$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « ne pas avoir un 6 » $P(\overline{\text{S}}) = \frac{5}{6}$

On répète cette épreuve cinq fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 5 lancers.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5 ; \frac{1}{6})$.

$$P(\text{"obtenir exactement deux fois un 6"}) = P(\text{X} = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3\,888}$$

Attention à bien mettre les parenthèses autour des fractions pour les puissances (principe d'enfermement des fractions dans des parenthèses).

4 L'épreuve « lancer le ballon » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « réussir le panier » $P(\text{S}) = 0{,}8$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « rater le panier » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}2$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 4 lancers (c'est-à-dire le nombre de paniers réussis).
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}8)$.

$$P(\text{"le joueur réussit au moins un panier"}) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}998$$

$$P(\text{"le joueur réussit au moins trois paniers"}) = P(\text{X} \geq 3) = P(\text{X} = 3) + P(\text{X} = 4) = 0{,}8192$$

On a : $P(\text{X} = 3) = \binom{4}{3} \times (0{,}8)^3 \times 0{,}2^1$; $P(\text{X} = 4) = \binom{4}{4} \times (0{,}8)^4 \times 0{,}2^0$

5 L'épreuve « tirer une boule dans l'urne » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « tirer une boule blanche » $P(\text{S}) = \frac{3}{8}$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « tirer une boule noire » $P(\overline{\text{S}}) = \frac{5}{8}$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 3 tirages.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; \frac{3}{8})$.

$P(\text{"tirer exactement deux boules blanches"}) = P(\text{X} = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \left(\frac{5}{8}\right)^1 = 0{,}263671875$ (valeur exacte, on a écrit toutes les décimales).

Attention à bien mettre des parenthèses autour des fractions qui sont élevées à des puissances.

6 L'épreuve « lancer la flèche » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « atteindre la cible » $P(\text{S}) = 0{,}75$
- soit à un échec $\overline{\text{S}}$: « rater la cible » $P(\overline{\text{S}}) = 0{,}25$

On répète cette épreuve quatre fois dans des conditions identiques indépendantes.

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 4 lancers (c'est-à-dire le nombre de fois où la cible a été atteinte).
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4\,;\,0{,}75)$.

$P(\text{"atteindre exactement trois fois la cible"}) = P(\mathrm{X}=3) = \binom{4}{3} \times 0{,}75^3 \times 0{,}25^1 = 0{,}421875$ (valeur exacte, on a écrit toutes les décimales)

$P(\text{"atteindre au moins une fois la cible"}) = P(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - P(\mathrm{X}=0) = 0{,}99609375$

7 L'épreuve « répondre à une question » est une épreuve de Bernoulli modélisée par une loi de probabilité P qui conduit

- soit à un succès S : « la réponse est exacte » $\quad P(\mathrm{S}) = \dfrac{1}{3}$
- soit à un échec $\overline{\mathrm{S}}$: « la réponse est fausse » $\quad P(\overline{\mathrm{S}}) = \dfrac{2}{3}$

On répète cette épreuve 10 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des 10 questions.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

1°) E : « obtenir exactement deux réponses exactes ».

$$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{X}=2) = \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 45 \times \frac{2^8}{3^{10}} = 0{,}19509219...$$

Attention à bien mettre des parenthèses autour des fractions qui sont élevées à certaines puissances.

2°) F : « obtenir au moins cinq réponses exactes »

$$\begin{aligned} P(\mathrm{F}) &= P(\mathrm{X} \geq 5) \\ &= 1 - \left[P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2) + P(\mathrm{X}=3) + P(\mathrm{X}=4)\right] \\ &= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6\right] \\ &= 0{,}213108... \end{aligned}$$

Ou

$$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{X} \geq 5) = P(\mathrm{X}=5) + P(\mathrm{X}=6) + P(\mathrm{X}=7) + P(\mathrm{X}=8) + P(\mathrm{X}=9) + P(\mathrm{X}=10) = 0{,}213108...$$

8 On note S l'événement « gagner une partie ».

Il s'agit d'expériences indépendantes. On applique le principe multiplicatif.

$$P(\text{"gagner au moins une fois"}) = 1 - P(\text{"gagner aucune fois"}) = 1 - P\left(\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\text{-}\overline{\mathrm{S}}\right) = 1 - \left[P(\overline{\mathrm{S}})\right]^5 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{2101}{3125}$$

$P(\text{"gagner au moins une fois"}) = 0{,}67232...$

Remarques :

★ On peut aussi parler de schéma de Bernoulli et introduire la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois où le joueur a gagné à l'issue des cinq parties mais ce n'est pas nécessaire.
Dans ce cas, on définit l'événement S : « gagner ».
L'événement contraire de S est alors l'événement $\overline{\mathrm{S}}$: « perdre ».

On a :

$P(\mathrm{S}) = \dfrac{1}{5} = p$

$P(\overline{\mathrm{S}}) = \dfrac{4}{5} = q$

★ On peut aussi définir l'événement E : « gagner au moins une fois ».

9 1°) Il n'est pas nécessaire de parler de schéma de Bernoulli ni de loi binomiale.
On applique le principe multiplicatif en considérant l'événement contraire.

$$p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Remarque :

Si l'on parle de schéma de Bernoulli et de loi binomiale, on définit l'événement S : « obtenir pile ».
L'événement contraire de S est alors l'événement $\overline{\mathrm{S}}$: « obtenir face ».

2°) $p_n \geq 0{,}999$ (1)

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq 0{,}999 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq 1 - 0{,}999 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq 0{,}001 \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2^n} \leq \ln 0{,}001 \\ &\Leftrightarrow -n\ln 2 \leq \ln 0{,}001 \\ &\Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln 0{,}001}{\ln 2} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, $-\dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 2} = 9{,}965784...$

On en déduit que le plus petit entier naturel n non nul tel que $p_n \geq 0{,}999$ est 10.

$\boxed{\textbf{10}}$ 1°) On considère l'événement S : « atteindre la cible ».

$$\begin{aligned} P(\text{"atteindre la cible au moins une fois"}) &= 1 - P(\text{"atteindre la cible aucune fois"}) \\ &= 1 - P\left(\overline{\text{S}}\text{-}\overline{\text{S}}\text{-...-}\overline{\text{S}}\text{-}\overline{\text{S}}\right) \\ &= 1 - \left[P\left(\overline{\text{S}}\right)\right]^n \\ &= 1 - 0{,}7^n \end{aligned}$$

2°) $1 - 0{,}7^n \geq 0{,}99 \quad (1)$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 0{,}7^n \geq 1 - 0{,}99 \\ &\Leftrightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0{,}7^n\right) \leq \ln 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow n \ln 0{,}7 \leq \ln 0{,}01 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} \text{ (car } \ln 0{,}7 < 0\text{)} \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} = 12{,}91...$

Il « faut » tirer au moins 13 fois pour que la probabilité qu'il atteigne sa cible au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,99.

$\boxed{\textbf{12}}$ Dans cet exercice, il n'y a pas de loi binomiale ni de schéma de Bernoulli. On utilise juste le **principe multiplicatif.**

1°) A : « le joueur atteint 3 fois la case 3 »

$$P(\text{A}) = P(3-3-3) = P(3) \times P(3) \times P(3) = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343}{1\,728}$$

2°) B : « le joueur atteint les cases 1, 2, 3 dans n'importe quel ordre »

$$P(\text{B}) = P(1-2-3) + P(1-3-2) + P(2-1-3) + P(2-3-1) + P(3-1-2) + P(3-2-1) = \frac{7}{72} = 0{,}09722...$$