1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 9 février 2012

I. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\geqslant 100$.

II. La méthode de dichotomie

Le mot **dichotomie** signifie « partage » en deux (on reconnaît dans le mot dichotomie la racine grecque « di » qui signifie « deux »).

Rappel : On appelle **centre d'un intervalle [a ; b]** ($a<b$) le nombre $c=\frac{a+b}{2}$.

Le but de cet exercice est de calculer les premiers termes de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres décimaux qui encadrent $\sqrt{7}$.

On va obtenir ces suites en utilisant une méthode classique en mathématiques : **la méthode de dichotomie**.
Il s'agit d'une méthode algorithmique facile à mettre en œuvre sur tableur.

L'algorithme génère deux suites deux suites (u_n) et (v_n) qui comportent deux difficultés.
D'une part, elles ne peuvent pas être définies séparément (on parle de « suites imbriquées ») ; d'autre part, elles ne peuvent pas être définies explicitement.

1°) Des encadrements de $\sqrt{7}$ (en utilisant la calculatrice)

On part de l'encadrement $2<\sqrt{7}<3$ (car $2^2<7<3^2$).
On pose : $u_0=2$ et $v_0=3$.

● **1$^{\text{ère}}$ étape :** on prend le centre 2,5 de l'intervalle [2 ; 3].
On a : $2,5<\sqrt{7}<3$ car $(2,5)^2<7<3^2$
On pose : $u_1=2,5$ et $v_1=3$.

● **2$^{\text{e}}$ étape :** on prend le centre 2,75 de l'intervalle [2,5 ; 3].
On a : $2,5<\sqrt{7}<2,75$ car $(2,5)^2<7<2,75^2$
On pose : $u_2=2,5$ et $v_2=2,75$.

● **Et ainsi de suite.** On construit les suites (u_n) et (v_n) selon le procédé expliqué précédemment.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leq\sqrt{7}\leq v_n$.

Écrire l'encadrement obtenu à la troisième étape puis à la quatrième étape.
Donner les valeurs de u_3, v_3, u_4, v_4 sous forme décimale (sans arrondir ni tronquer les résultats).

2°) Utilisation d'un tableur

a) Réaliser une feuille de calcul sur le modèle suivant

	A	B	C	D	E
1	n	u_n	v_n	$w_n=(u_n+v_n)/2$	w_n^2
2	0	2	3		
3	1				
4	3				

N.B. : w_n est le centre de l'intervalle $[u_n\,;\,v_n]$.

b) Dans la cellule D2, saisir la formule `=(B2+C2)/2` ;

dans la cellule E2, saisir la formule `=D2^2` ;

dans les cellules B3 et C3, saisir respectivement les formules :

`= SI(E2 < 7 ; D2 ; B2)` et `= SI(E2 < 7 ; C2 ; D2)`.

Recopier vers le bas dans chacune des colonnes de la feuille.

Note : SI(E2 < 7 ; D2 ; B2) signifie que si le contenu de la cellule E2 est strictement inférieur à 7, le contenu de B3 est celui de D2, sinon celui de B2.

Attention sur les versions anglaises de *Excel*, le « SI » est remplacé par « IF ».

c) Donner un encadrement de $\sqrt{7}$ par deux décimaux d'amplitude inférieure 10^{-6} ?

Recommencer le même travail avec les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

3°) En utilisant la méthode précédente, déterminer un encadrement de $\sqrt[3]{2}$ par deux décimaux d'amplitude inférieure 10^{-6}.