1$^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les angles orientés

$\boxed{1}$ Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 10 cm, un arc $\overset{\frown}{AB}$ a pour longueur 5 cm.
Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

$\boxed{2}$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 6 cm.
Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOB} = 24°$.

Calculer la longueur du grand arc $\underset{\smile}{AB}$.

Dans tous les exercices à partir du $\boxed{3}$, le plan *P* est orienté.

$\boxed{3}$ 1°) Les nombres $\dfrac{17\pi}{3}$ et $-\dfrac{7\pi}{3}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ?

2°) Les nombres $-\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{14\pi}{5}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ?

Dans tous les exercices suivants, le plan est orienté.

$\boxed{4}$ Soit ABCD un carré direct de centre I dans le plan.
Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}\right)$, $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{ID}\right)$, $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{CI}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{ID}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CI}\right)$.

Remarque :
Dans un angle orienté, on peut remplacer un vecteur par un vecteur égal de manière à se ramener à deux vecteurs qui ont la même origine.
Ne pas créer de nouveau point.

$\boxed{5}$ Soit ABC un triangle équilatéral direct.
1°) Faire une figure en prenant (BC) « horizontale », A au-dessus de (BC), B à gauche de C.
2°) Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés :
$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right)$.
On pourra introduire des points.
Pour cela, on définira clairement chaque point introduit par une égalité vectorielle puis on le placera sur la figure.

$\boxed{6}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

1°) Recopier et compléter la phrase :
« Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ sont tous les nombres de la forme ... ».
Illustrer ces mesures sur la droite réelle en indiquant les multiples entiers de π.
2°) Parmi toutes ces mesures, une seule appartient à l'intervalle $[-2\pi;0]$. Laquelle ?

$\boxed{7}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[-3\pi;-\pi]$.

Dans les exercices $\boxed{8}$ à $\boxed{10}$, le plan orienté *P* est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et l'on note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. On désigne par A le point de coordonnées (1 ; 0).

$\boxed{8}$ Soit M l'image de $-\dfrac{74\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

1°) Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$.
2°) Construire M au compas.

$\boxed{9}$ Même exercice que le $\boxed{8}$ avec $-\dfrac{205\pi}{3}$.

$\boxed{10}$ Même exercice que le $\boxed{8}$ avec $\dfrac{127\pi}{6}$.

$\boxed{11}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{5}$.

Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\vec{u};-\vec{v}\right)$, $\left(\vec{v};-\vec{u}\right)$, $\left(-\vec{u};-\vec{v}\right)$ en détaillant bien toutes les étapes et en appliquant chaque fois une règle par étape.

$\boxed{12}$ Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{7\pi}{6}$ et $\left(\vec{v};\vec{w}\right)=\dfrac{4\pi}{3}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

$\boxed{13}$ Soit ABC un triangle tel que AB = 6 cm, $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{5}$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

Construire ABC à l'aide du rapporteur. Indiquer les mesures des angles orientés $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$ sur la figure.
En utilisant les propriétés des angles orientés, déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}\right)$.

$\boxed{14}$ Soit ABC un triangle quelconque.
Calculer en utilisant les propriétés des angles orientés la somme $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$.
On n'utilisera pas la somme des angles géométriques d'un triangle.

$\boxed{15}$ Soit ABCD un parallélogramme tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{3\pi}{5}$.

Faire une figure en utilisant le rapporteur. Faire figurer sur cette figure la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$
Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)$.
On détaillera bien chaque étape et l'on n'utilisera qu'une seule règle à chaque étape.

$\boxed{16}$ Soit A, B, C, D, E tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{12}$; $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$

(on suppose que A est distinct des points B, C, D, E).
Aucune figure n'est demandée dans cet exercice.
Démontrer que les points A, D, E sont alignés.

$\boxed{17}$ Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note M et N les images respectives des réels $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
Placer M et N sur le cercle à l'aide du compas.
Déterminer la nature du triangle OMN.

Réponses

$\boxed{1}$ Attention (rappel de notation) : la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ se note $l\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ ou $\text{long}\left(\overset{\frown}{AB}\right)$.

On peut faire la figure une fois que l'on a répondu à la question (ce peut d'ailleurs être une question motivant la formule donnant l'expression de la longueur d'un arc).

$\widehat{AOB} = \dfrac{1}{2}$ rad

On fait un tableau de proportionnalité pour convertir en degrés la mesure en radians (« tableau de conversion »).

$\dfrac{0,5 \times 180}{\pi} = 28,647...$

La valeur arrondie au centième de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à 28,65°.

On pourra écrire $\widehat{AOB} \approx 28,65°$ (valeur arrondie au centième).

$\boxed{2}$ La longueur du grand arc $\overset{\smile}{AB}$ est égale à $\dfrac{56\pi}{5}$ cm.

Détail de la démarche :

La mesure de l'angle $\overset{\smile}{AOB}$ rentrant est égale à $360° - \widehat{AOB} = 360° - 24° = 336°$.

$\dfrac{336 \times \pi}{180} = \dfrac{28\pi}{15}$

$\boxed{3}$ **Méthode :** on calcule la différence entre les deux mesures proposées et l'on regarde si le résultat est un multiple entier de 2π.

1°) Les nombres $\dfrac{17\pi}{3}$ et $-\dfrac{7\pi}{3}$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté.

2°) Les nombres $-\dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{14\pi}{5}$ ne sont pas des mesures en radians d'un même angle orienté.

$\boxed{4}$ Faire une figure pour chaque angle.

L'idée de l'exercice : trouver des égalités de vecteurs pour qu'ils aient la même origine.

On peut donner une mesure positive et une mesure négative de chaque angle orienté.

$\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

On peut faire apparaître ces deux mesures sur la figure.

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{IA}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

$\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \pi$ ($\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont colinéaires et de sens contraire car $I \in [BD]$) ou $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right) = -\pi$.

On peut faire apparaître ces deux mesures sur la figure.

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{ID}\right)$ est π.

$\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}\,;\overrightarrow{CI}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{2}$.

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = -\dfrac{5\pi}{4}$

(détail : I est le centre du carré ABCD donc I est le milieu du segment [BD], par suite, on a : $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$.

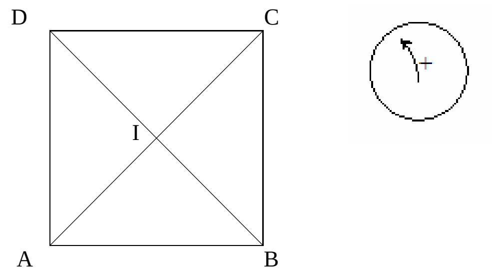
$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right) = \left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}\right) = \dfrac{\pi}{4}$).

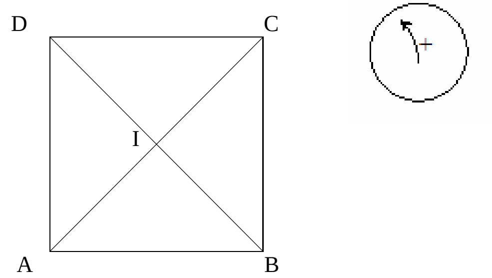
La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{ID}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

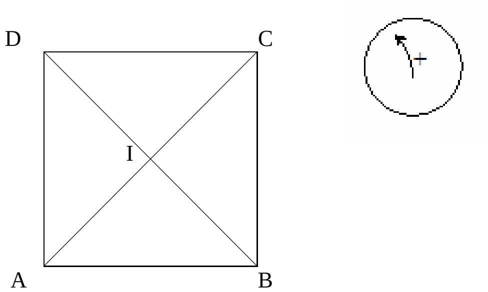
$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ou $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right) = -\dfrac{5\pi}{4}$.

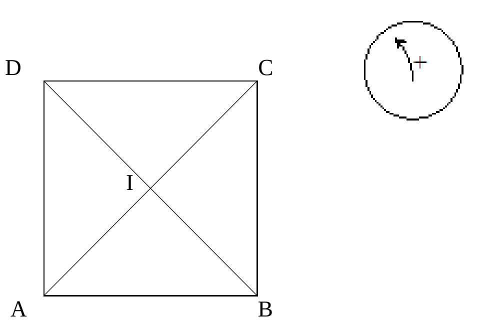
La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

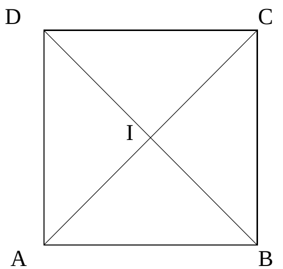
(détail : ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; par suite, $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CI}\right) = \dfrac{\pi}{4}$).



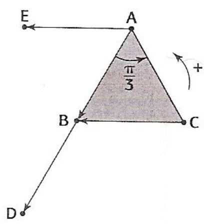








$\boxed{5}$ 1°) On utilise le compas.



2°)

- On sait que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ d'où compte tenu de l'orientation,

$\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3}$.

- $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ n'ont pas la même origine.

Soit D le point tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.
Ainsi : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}\right)$.

Or $\widehat{CBD} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ d'où, vue l'orientation $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

Par conséquent, $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

- De même, soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.

Alors : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

$\boxed{6}$ 1°) Les mesures de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ sont tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. 2°) $-\frac{5\pi}{3}$

$\boxed{7}$ La mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ qui appartient à l'intervalle $\left[-3\pi\,;-\pi\right]$ est $-\frac{7\pi}{4}$.

Explication :

$-\pi \leq \frac{\pi}{4} \leq \pi$ donc $-\pi - 2\pi \leq \frac{\pi}{4} - 2\pi \leq \pi - 2\pi$ soit $-3\pi \leq -\frac{7\pi}{4} \leq -\pi$.

$\boxed{8}$ 1°) La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{2\pi}{3}$.

2°) Construction du point M.

On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
(Il est inutile de refaire toutes les marques de compas à partir du point A).

N.B. :
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :
- en plusieurs coups de compas ;
- en traçant la médiatrice du segment [OA'] (en prenant la « moitié » de [OA']).

Sur la figure, on marque l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ (même notation qu'un angle normal sauf que l'on met une flèche) et l'on écrit $-\frac{2\pi}{3}$.

On écrit M $\left(-\frac{74\pi}{3}\right)$.

$\boxed{9}$ 1°) La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{\pi}{3}$.

2°) On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point A.

On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{AB'}$.

10 1°) $6\times21<127<6\times22$

$\frac{127\pi}{6}=\frac{6\times22\pi-5\pi}{6}=22\pi-\frac{5\pi}{6}$

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est $-\frac{5\pi}{6}$.

2°) On peut construire le point M d'un seul coup de compas. On place la pointe sèche du compas au point B'.
On prend un écart de compas égal au rayon du cercle. Le point M est alors obtenu sur l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$.
N.B. :
Il y a d'autres méthodes pour obtenir le point M :
- en plusieurs coups de compas ;
- en traçant la médiatrice du segment [OB'] ;
- en angle de $\frac{\pi}{3}$ puis en effectuant une construction de bissectrice.

11 Il est inutile de faire une figure ; en tout cas, si on fait une figure, on trace les deux vecteurs sans faire figurer de cercle trigonométrique.

Attention, l'énoncé demande chaque fois une mesure principale de l'angle orienté.

$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=-\frac{4\pi}{5}$

En appliquant les règles sur les mesures d'angles orientés, on trouve $\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\frac{6\pi}{5}$.

$\frac{6\pi}{5}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$ mais ce n'est pas la mesure principale car $\frac{6\pi}{5}$ n'appartient pas à l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$.

Pour trouver la mesure principale, on peut retrancher 2π.

$\frac{6\pi}{5}-2\pi=-\frac{4\pi}{5}$

La mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)$ est $-\frac{4\pi}{5}$.

N.B. :

Quand on a une mesure d'un angle orienté de vecteurs, on peut toujours ajouter ou retrancher un multiple entier de 2π.
On applique la technique générale pour les mesures principales uniquement lorsque l'on a des « gros nombres ». Ici, les nombres sont petits ce qui explique que l'on procède autrement.

$\left(\vec{v}\,;-\vec{u}\right)=\frac{4\pi}{5}$, $\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\frac{\pi}{5}$.

13 On convertit $\frac{\pi}{5}$ rad $=36°$ pour faire la figure. $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{4\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{19\pi}{30}$; $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{5}$.

14 $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\pi$

15 On a : $\frac{180\times3\pi}{5\pi}=108$

L'angle $\widehat{BAD}$ mesure 108°.

$\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{3\pi}{5}$; $\left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}\right)=\frac{2\pi}{5}$

N.B. : on pourrait aussi utiliser les propriétés des angles géométriques dans un parallélogramme vues en 5e :
Dans un parallélogramme, les angles consécutifs sont supplémentaires et les angles opposés ont la même mesure. Il s'agit dans les deux cas d'angles géométriques.
Cela dit, ce n'est pas trop l'esprit de ce type d'exercice : on aime mieux rester uniquement avec les angles orientés et utiliser les règles sur les angles orientés. En effet, si l'on utilisait les angles géométriques, pour repasser en angles orientés on serait obligé de regarder la figure pour l'orientation.

16 On suppose qu'aucun des points B, C, D, E ne soit confondu avec A
On démontrer en utilisant la relation de Chasles que : $\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires de même sens. Par conséquent, les points A, D, E sont alignés.

N.B. : La méthode qui consiste à démontrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ n'est pas très satisfaisante (mais elle « marche »).

17 Le triangle OMN est rectangle isocèle en O.

Travail personnel

Séquence bac Tous les exercices des pages 245 et 246

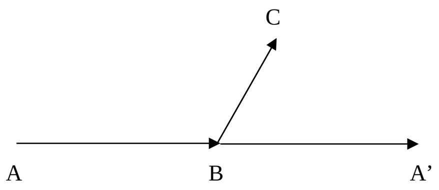
Compétences sur les angles orientés :

- Convertir une mesure d'angles en degrés en radians et vice versa ;
- Calculer la longueur d'un arc de cercle ;
- Marquer une mesure d'angle orienté sur une figure ;
- Lire une mesure d'angle orienté sur une figure ;
- Démontrer que des droites sont parallèles ou orthogonales à l'aide des angles orientés ;
- Démontrer que des points sont alignés à l'aide des angles orientés ;
- Utiliser les propriétés des angles orientés pour calculer des mesures d'angles orientés ;
- Savoir repérer les points sur le cercle trigonométrique ;
- Savoir placer les points associés aux valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique ;
- Savoir calculer la mesure principale d'un angle orienté.

Une méthode importante

Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

1ère méthode : on trace un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir du point B.



On note A' le symétrique de B par rapport au point A.

Retenir cette méthode de déplacement d'un vecteur.

Dans ce cas, voir comment on indique sur la figure une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

2e méthode : utilisation des règles du cours