1ère S

Exercices sur sens de variations des fonctions dérivables

Etude des variations de fonctions polynômes

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{4}$, calculer $f'(x)$.
Dresser le tableau de variation de f ; on tracera les flèches à la règle.
Calculer les extremums locaux éventuels et compléter le tableau de variation.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{1}$ $f(x)=-2x^3+6x-3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{2}$ $f(x)=x^3-3x^2+3$ (factoriser $f'(x)$)

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3+x-1$

$\boxed{4}$ $f(x)=-x^3+x^2+x-2$

Etude des variations de fonctions rationnelles

Dans les exercices $\boxed{5}$ à $\boxed{12}$, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, déterminer sur quel ensemble f est dérivable et calculer $f'(x)$.
Dresser le tableau de variation de f ; on tracera les flèches à la règle.
On n'oubliera pas de mettre des doubles barres sur la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et sur la ligne « Variations de f » lorsque la fonction n'est pas définie.
Attention, pour tracer une double barre, on utilise la règle pour tracer un trait continu entre la ligne intitulée « Signe de $f'(x)$ » et la ligne « Variations de f ».
Calculer les extremums éventuels et compléter le tableau de variations.
Faire des phrases pour expliquer le sens de variation de la fonction.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ (déterminer d'abord le domaine de définition de f)

$\boxed{6}$ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ (factoriser le numérateur de $f'(x)$; ne pas oublier les doubles barres)

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

$\boxed{8}$ $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x+3}$

$\boxed{9}$ $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$

$\boxed{10}$ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{11}$ $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2x}$

$\boxed{12}$ $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

$\boxed{13}$ **Etude d'une fonction polynôme du troisième degré**

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-3x+2$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Calculer $f'(x)$ en factorisant le résultat et faire le tableau de variation de f. Calculer les extremums locaux.
Faire des phrases expliquant les variations.
2°) Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									

3°) Sur un graphique, tracer le repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant l'échelle indiquée au début de l'exercice.
Placer les points du tableau précédent.
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour les points correspondant aux extremums locaux.
Tracer les tangentes horizontales en ces points. On rappelle que l'on représente usuellement une tangente par une double flèche.
4°) Tracer $\mathcal{C}$ en reliant les points précédents à la main en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage des tangentes horizontales.
Contrôler sur la calculatrice graphique ou sur un logiciel de tracé de courbes tel que *Sinequanon*.

$\boxed{14}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
3°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale.

$\boxed{15}$ On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.
2°) Dresser le tableau de variation de f.
3°) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y=4x$.

Dans chacun des exercices $\boxed{16}$ à $\boxed{19}$, on donne une fonction f et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-2\ ;\ -1)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ $f(x)=x^3+3x^2$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-1\ ;\ 2)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{18}$ $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(1\ ;\ 3)$ pour centre de symétrie.

19 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie ; on suppose que le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est **orthogonal.**

20 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f*. Faire le tableau de variation de *f* ; en déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ pour $x\in \mathrm{I}$, I étant un intervalle précisé dans chaque cas.

1°) $f : x \mapsto -x^3-2x^2+4x+3$; $\mathrm{I}=[-3\,;1]$.

2°) $f : x \mapsto 2x^3-9x^2+12x+1$; $\mathrm{I}=[0\,;6]$.

3°) $f : x \mapsto \dfrac{9}{x}+x-1$; $\mathrm{I}=[1\,;4]$.

4°) $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$; $\mathrm{I}=[1\,;8]$.

Réponses

1 *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R}\;\; f'(x)=-6x^2+6=6\left(1-x^2\right)=6(1+x)(1-x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	-7	$\nearrow$	1	$\searrow$	

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$; *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$; *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

2 $\forall x\in\mathbb{R}\;\; f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$\boxed{f(0)=3}$

$f(2)=2^3-3\times 2^2+3=8-12+3=-4+3=-1$

3 $\forall x\in\mathbb{R}\;\; f'(x)=3x^2+1$

x	$-\infty$		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	
Variations de f		$\nearrow$	

Il n'y a pas d'extremum.

4 $\forall x\in\mathbb{R}\;\; f'(x)=-3x^2+2x+1$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et $-\dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit).

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\dfrac{59}{27}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)-2=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}-2=\frac{1+3-9-54}{27}=\frac{4-9-54}{27}=-\frac{59}{27}$$

5 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\;\; f'(x)=-\dfrac{3}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
SGN de -3		$-$	|	$-$	
SGN de $(x-2)^2$		$+$	0	$+$	
SGN de $f'(x)$		$-$	||	$-$	
Variations de f		$\searrow$	||	$\searrow$	

6 $\forall x\in\mathbb{R}^*\;\; f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ (seule cette écriture de la dérivée sous forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé permet de bien étudier le signe de $f'(x)$).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
SGN de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

Il peut être choquant à première vue de trouver que le maximum de f sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ plus petit que le maximum de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Mais il ne faut pas oublier que ce sont des extremums locaux de f !

$\boxed{7}$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\quad f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2\times 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x(2x-2-x)}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
SGN de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

$\boxed{8}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$$f'(x)=1+4\times\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)=\frac{(x+3)^2-4}{(x+3)^2}=\frac{(x+3)^2-2^2}{(x+3)^2}=\frac{[(x+3)+2][(x+3)-2]}{(x+3)^2}=\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)^2}$$

x	$-\infty$		-5		-3		-1		$+\infty$
SGN de $(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
SGN de $x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $(x+3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-8	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\boxed{9}$ $f'(x)=\dfrac{(2x-3)\times(x+1)-(x^2-3x)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

x^2+2x-3 est un polynôme du second degré qui admet pour racines 1 (racine évidente) et -3 (obtenue par produit).

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
SGN de x^2+2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	-9	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$\boxed{10}$ $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\dfrac{2\times(x^2+1)-2x\times(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

$\boxed{11}$ $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x\neq 0$

si et seulement si $x(x+2)\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x+2\neq 0$

si et seulement si $x\neq 0$ et $x\neq -2$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\,;-2\}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\ ;\ -2\}\quad f'(x) = -\dfrac{6(x+1)}{\left(x^2+2x\right)^2}$

f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;-2[$; f est croissante sur l'intervalle $]-2\ ;\ -1]$;
f est décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0[$; f est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$; $f(-1) = -3$.

$\boxed{12}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$; f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$; f est impaire.

$\boxed{13}$ 1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 3\left(x^2-1\right)$

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x-1$		$-$		$-$	0	+	
SGN de $x+1$		$-$	0	+		+	
SGN de $f'(x)$		+	0	$-$	0	+	
Variations de f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(-1) = -1+3+2 = 4$

$f(1) = 1-3+2 = 0$

f est croissante sur $]-\infty\ ;-1]$ et sur $[1\ ;+\infty[$; f est décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;1]$.

2°)

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	3,125	4	3,375	2	0,625	0	0,875	4

$f(-2) = -8+6+2 = 0$

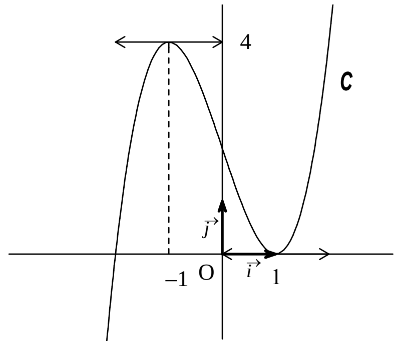
$f(-1{,}5) = -3{,}375+4{,}5+2 = -3{,}375+6{,}5 = 3{,}125$

$f(-0{,}5) = -0{,}125+1{,}5+2 = 3{,}375$

$f(0{,}5) = 0{,}125-1{,}5+2 = 0{,}625$

$f(1{,}5) = 3{,}375-4{,}5+2 = 0{,}875$

$f(2) = 8-6+2 = 4$



$\boxed{14}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$ 2°) T a pour équation $y = -x+1$.

3°) La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

$\boxed{15}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\quad f'(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

2°)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
SGN de 1		+	0	+	
SGN de $(2x+1)^2$		+	‖	+	
SGN de $f'(x)$		+	‖	+	
Variations de f		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\ ;-\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

3°) Si deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur.
Le coefficient directeur de Δ est égal à 4.
On résout l'équation $f'(x) = 4$.

$(2x+1)^2 = \dfrac{1}{4}$

Ne pas développer le 1[er] membre.

$2x+1 = \dfrac{1}{2}$ ou $2x+1 = -\dfrac{1}{2}$

$x = -\dfrac{1}{4}$ ou $x = -\dfrac{3}{4}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y = 4x$ aux points d'abscisses $-\dfrac{1}{4}$ et $-\dfrac{3}{4}$.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

$\mathcal{D}_f$ est centré en – 2.

Soit h un réel quelconque.

$-2+h\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow -2+h\neq -2$

$\Leftrightarrow h\neq 0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 0$.

On effectue les calculs de $f(-2+h)$ et $f(-2-h)$ séparément.

$$f(-2+h)=\frac{(-2+h)^2+3(-2+h)+1}{-2+h+2}=\frac{4-4h+h^2-6+3h+1}{h}=\frac{h^2-h-1}{h}$$

$$f(-2-h)=\frac{(-2-h)^2+3(-2-h)+1}{-2-h+2}=\frac{4+4h+h^2-6-3h+1}{-h}=\frac{h^2+h-1}{-h}=-\frac{h^2+h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par – h dans le calcul de $f(-2+h)$).

$$\forall h\neq 0\quad f(-2+h)+f(-2-h)=\frac{h^2-h-1}{h}-\frac{h^2+h-1}{h}=-\frac{2h}{h}=-2=-2\times 1$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-2\ ;\ -1)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{17}$ $f(x)=x^3+3x^2$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

Démontrons que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-1\ ;\ 2)$ pour centre de symétrie.

$\mathcal{D}_f$ est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$$f(-1+h)=(-1+h)^3+3(-1+h)^2=-1+3h-3h^2+h^3+3(1-2h+h^2)=h^3-3h+2$$

$f(-1-h)=-h^3+3h+2$ (On remplace h par – h dans le calcul de $f(-1+h)$)

$$\forall h\in\mathbb{R}\quad f(-1+h)+f(-1-h)=h^3-3h+2-h^3+3h+2=4=2\times 2$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(-1\ ;\ 2)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{18}$ $f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(1\ ;\ 3)$ pour centre de symétrie.

$\mathcal{D}_f$ est centré en 1.

Soit h un réel quelconque.

$1+h\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow 1+h\neq 1$

$\Leftrightarrow h\neq 0$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 0$.

On effectue les calculs de $f(1+h)$ et $f(1-h)$ séparément.

$$f(1+h)=\frac{3(1+h)-2}{1+h-1}=\frac{3h+1}{h}$$

$$f(1-h)=\frac{3(-h)+1}{-h}=-\frac{-3h+1}{h}=\frac{3h-1}{h}$$

(On peut aussi tout simplement remplacer h par – h dans le calcul de $f(1+h)$).

$$\forall h\neq 0\quad f(1+h)+f(1-h)=\frac{3h+1}{h}+\frac{3h-1}{h}=\frac{6h}{h}=6=2\times 3$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(1\ ;\ 3)$ pour centre de symétrie.

$\boxed{19}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{0\ ;\ -2\}$

Le repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ est orthogonal.

Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

$\mathcal{D}_f$ est centré en – 1.

Soit h un réel quelconque.

$-1+h\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow -1+h\neq 0$ et $-1+h\neq -2$

$\Leftrightarrow h\neq 1$ et $h\neq -1$

Dans toute la suite, on suppose que $h\neq 1$ et $h\neq -1$

On effectue les calculs de $f(-1+h)$ et $f(-1-h)$ séparément.

$f(-1+h)=\dfrac{1}{(-1+h)^2+2(-1+h)}=\dfrac{1}{1-2h+h^2-2+2h}=\dfrac{1}{h^2-1}$

$f(-1-h)=\dfrac{1}{h^2-1}$

$\forall h\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}\quad f(-1+h)=f(-1-h)$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour axe de symétrie.

20 1°) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-3x^2-4x+4$

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘	-2	↗	$\frac{121}{27}$	↘	

$f(-3)=0$

$f(1)=4$

Le minimum de f sur l'intervalle [–3 ; 1] est égal à –5 et le maximum de f sur l'intervalle [–3 ; 1] est égal à $\dfrac{121}{27}$.

Donc si $x\in[-3\ ;\ 1]$, alors : $\boxed{-2\leq f(x)\leq\dfrac{121}{27}}$.

2°) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6\left(x^2-3x+2\right)$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	6	↘	5	↗	

$f(0)=1$

$f(6)=181$

Le minimum de f sur l'intervalle [0 ; 6] est égal à 1 et le maximum de f sur l'intervalle [0 ; 6] est égal à 181.

Donc si $x\in[0\ ;\ 5]$, alors : $\boxed{1\leq f(x)\leq 181}$.

3°) $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	-7	↘	‖	↘	5	↗	

$f(1)=9$

$f(4)=\dfrac{21}{4}$

Le minimum de f sur l'intervalle [1 ; 4] est égal à 5 et le maximum de f sur l'intervalle [1 ; 4] est égal à 9.

Donc si $x\in[1\ ;\ 4]$, alors : $\boxed{5\leq f(x)\leq 9}$.

4°) $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\quad f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+4}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-1		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$5+2\sqrt{5}$	↗	‖	↗	$5-2\sqrt{5}$	↘	

$f(1)=\dfrac{-1^2+3\times1-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(8)=\dfrac{-8^2+3\times8-1}{8+1}=-\dfrac{41}{9}$

Le minimum de f sur l'intervalle [1 ; 8] est égal à $-\dfrac{41}{9}$ et le maximum de f sur l'intervalle [1 ; 8] est égal à $5-2\sqrt{5}$.

Donc si $x\in[1\,;8]$, alors $\boxed{-\dfrac{41}{9}\leq f(x)\leq 5-2\sqrt{5}}$.

Complément pour le 4°) : calcul des extremums

$f = \dfrac{u}{v}$

$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Si $f'(a) = 0$, alors $u'(a)v(a) - u(a)v'(a) = 0$.

Donc sous réserve d'existence des dénominateurs, on a : $\boxed{\dfrac{u(a)}{v(a)} = \dfrac{u'(a)}{v'(a)}}$.

Ici, $u(x) = -x^2 + 3x - 1$

$v(x) = x + 1$

$u'(x) = -2x + 3$

$v'(x) = 1$

$$f\left(-1+\sqrt{5}\right) = \frac{u\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v\left(-1+\sqrt{5}\right)} = \frac{u'\left(-1+\sqrt{5}\right)}{v'\left(-1+\sqrt{5}\right)} = \frac{-2\left(-1+\sqrt{5}\right)+3}{1} = 5 - 2\sqrt{5}$$

TRAVAIL PERSONNEL

- **Séquence bac** (ancienne édition) p.121 exercices 1 à 4 et p.132 exercices 6 à 10

- **Contrôle continu** p.107 exercices 6 et 7

Exercices supplémentaires

$\boxed{f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 9 \neq 0$

si et seulement si $x^2 \neq 9$

si et seulement si $x \neq -3$ et $x \neq 3$

D $= \mathbb{R}\backslash\{-3\ ;\ 3\}$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $-2\left(x^2+9\right)$		–	|	–	|	–	
SGN de $\left(x^2-9\right)^2$		+	0	+	0	+	
SGN de $f'(x)$		–	||	–	||	–	
Variations de f		↘	||	↘	||	↘	

$\boxed{f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2}{x-3}}$

D $= \mathbb{R}\backslash\{3\}$

Pour dériver, il ne faut pas transformer l'expression de *f* (en particulier, il ne faut pas écrire $f(x)$ sous forme d'un seul quotient).

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \quad f'(x) = 2 + \dfrac{2}{(x-3)^2}$

On voit immédiatement que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \quad f'(x) > 0$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		+	||	+	
Variations de f		↗	||	↗	

$\boxed{f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2}}$

D $=\mathbb{R}^*$

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f'(x)=\frac{(2x+2)\times x^2-\left(x^2+2x+4\right)\times 2x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x^2-2x^3-4x^2-8x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-4x(x-2)}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-4(x-2)}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
SGN de $-4(x-2)$		+	‖	+	0	–	
SGN de x^3		–	‖	+		+	
SGN de $f'(x)$		+	‖	+	0	–	
Variations de f		↗	‖	↗	3	↘	

$\boxed{f(x)=\dfrac{2x^2-4x+4}{x^2-2x+6}}$

x^2-2x+6 est un polynôme du second degré
$\Delta=4-24=-20$
$\Delta<0$ donc le polynôme n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

D $=\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{(4x-4)\left(x^2-2x+6\right)-\left(2x^2-4x+4\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x+6\right)^2}=\frac{16x-16}{\left(x^2-2x+6\right)^2}=\frac{16(x-1)}{\left(x^2-2x+6\right)^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $16(x-1)$		–	0	+	
Signe de $\left(x^2-2x+6\right)^2$		+		+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f		↘	$\frac{2}{5}$	↗	

$\boxed{f(x)=\dfrac{2x^2+12x}{x^2+4}}$

D $=\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{(4x+12)\left(x^2+4\right)-\left(2x^2+12\right)\times 2x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{(4x+12)\left(x^2+4\right)-\left(2x^2+12\right)\times 2x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{12x^2-8x+48}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=4\frac{\left(3x^2-2x+12\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$3x^2-2x+12$ est un polynôme du second degré
$\Delta=4-144=-140$
$\Delta<0$ donc le polynôme est toujours du signe de son monôme de degré 2 c'est-à-dire strictement positif.

x	$-\infty$		$+\infty$
SGN de $4\left(3x^2-2x+12\right)$		+	
SGN de $\left(x^2+4\right)^2$		+	
SGN de $f'(x)$		+	
Variations de f		↗	