1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les variables aléatoires

1 Un sac contient quatre jetons marqués 0, 1, 2, 3. On tire deux jetons l'un après l'autre sans remise.
1°) Faire un arbre de possibilités.
2°) On note X la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres tirés.
Déterminer la loi de probabilité de X en tableau.

2 On lance une pièce non truquée trois fois de suite.
On note les résultats dans l'ordre d'apparition.
1°) Faire un arbre de possibilités.
2°) On note X le nombre de piles à l'issue des trois lancers.
Déterminer la loi de probabilité de X en tableau.
3°) Calculer $E(\mathrm{X})$, $V(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

3 On lance un dé non pipé.
On gagne 1 € si le 1 apparaît et 6 € si le 6 apparaît ; on perd 2 € dans tous les autres cas.
On note X le gain algébrique en euros lors d'un lancer.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X en tableau.
2°) Calculer $E(\mathrm{X})$, $V(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

4 Une urne contient trois boules vertes, deux boules rouges et une boule noire. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne. On note la couleur de chaque boule tirée.
1°) A l'aide d'un tableau ou d'un arbre, déterminer toutes les issues de l'expérience.
2°) On considère les événements A et B définis ci-après.
A : « La première boules tirée est verte » ;
B : « La première boule tirée est noire ».
a) Calculer la probabilité de A et celle de B.
b) Calculer la probabilité de l'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
3°) Les boules vertes portent le numéro 0, les rouges le numéro 5 et la noire le numéro a avec a différent de 0, 5 et 10. La variable aléatoire X associe à chaque issue la somme des numéros sortis.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

5 Dans un jeu de trente-deux cartes, constitué de 4 as, 4 rois, 4 dames, 4 valets, 4 dix, 4 neuf, 4 huit, 4 sept, on associe à chaque carte une valeur en euros suivant le tableau ci-dessous :

Carte	As	Roi	Dame	Valet	Dix	Neuf	Huit	Sept
Valeur en euros	13	11	11	5	5	5	3	1

Un joueur mise 5 €, tire une carte au hasard parmi les trente-deux cartes du jeu et reçoit la valeur en euros associée à cette carte. Chaque carte a la même probabilité d'être tirée.
Si le joueur reçoit une somme supérieure à sa mise, son gain est positif ; s'il reçoit une somme strictement inférieure à sa mise, son gain est strictement négatif, ce qui correspond à une perte d'argent.
1°) a) Calculer le nombre de cas où le gain de ce joueur est nul.
b) Calculer la probabilité p qu'il perde de l'argent.
2°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage fait correspondre le gain algébrique en euros du joueur.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.

6 Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
A chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ le point M(x, y).
On désigne par D le disque fermé de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

Donner les résultats en fractions irréductibles.

1°) Placer dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les points correspondants aux différents résultats possibles.
2°) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « le point M est sur l'axe des abscisses » ;
B : « le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3°) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme x^2+y^2.
a) Déterminer la loi de X.
b) Calculer $E(\mathrm{X})$ et $V(\mathrm{X})$.
c) Calculer la probabilité de l'événement C : « le point M appartient au disque D ».

7 Un appareil produit en série peut présenter à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut de B.
1°) On prélève un lot de 200 appareils. Le défaut A est observé sur 16 appareils, le défaut B sur 12 appareils et 180 n'ont aucun défaut.
Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Nombre d'appareils	**Avec le défaut A**	**Sans le défaut A**	**Total**
Avec le défaut B			
Sans le défaut B			
Total			

2°) Cet appareil produit en série a un coût de production de 95 €. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :
10 € pour le seul défaut A,
15 € pour le seul défaut B,
25 € pour les deux défauts A et B.
On note X la variable aléatoire qui, à tout appareil choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation.
a) Définir à l'aide d'un tableau la loi image de la variable aléatoire X. Donner les probabilités sous forme décimale.
b) Calculer l'espérance mathématique μ de cette variable aléatoire.
Que représente μ pour l'usine ?
3°) On suppose que tous les appareils ont été vendus.
a) L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96 € chaque appareil produit ?
b) Déterminer le prix de vente d'un appareil afin d'obtenir un bénéfice moyen de 10 € par appareil.

8 Une machine fabrique en série des tiges métalliques de forme cylindrique.
Une tige peut présenter l'un des deux défauts suivants :
• Défaut D_1 : le diamètre n'est pas conforme ;
• Défaut D_2 : la longueur n'est pas conforme.

Sur le lot L de 100 tiges, les informations suivantes sont données :
• 8 tiges présentent le défaut D_1 ;
• 6 tiges présentent le défaut D_2 ;
• 2 tiges présentent simultanément les défauts D_1 et D_2.

1°) Calculer le nombre de tiges du lot L qui ne présentent :
a) que le défaut D_1 ;
b) que le défaut D_2 ;
c) ni le défaut D_1 ni le défaut D_2.
2°) On tire au hasard une tige dans le lot L.
Chacune des tiges ayant la même probabilité d'être tirée :
a) calculer la probabilité de l'événement A : « la tige choisie présente les deux défauts » ;
b) calculer la probabilité de l'événement B : « la tige choisie présente un défaut et un seul » ;
c) calculer la probabilité de l'événement C : « la tige choisie ne présente aucun des deux défauts ».
3°) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage d'une tige associe le nombre de défauts présentés par cette tige.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
c) Calculer l'espérance et la variance de X.

9 On considère l'expérience aléatoire suivante :
Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6, 8.
Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
On appelle « partie » le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième.
Une partie a donc 25 résultats possibles, supposés équiprobables.
1°) a) Recopier, puis compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**
1					
2					
3					
4					
5					

b) Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme égale à 7 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme paire ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme au plus égale à 7 ?
2°) On considère le jeu suivant associé à chaque partie. Un joueur gagne :
• 30 € si la somme est paire ;
• 100 € si la somme est 13 ;
• 10 € si la somme est 1, 3 ou 5 ;
• et ne gagne rien dans les autres cas.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie associe son gain en euros.
a) Calculer la probabilité de gagner 100 €.
b) Donner sous la forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
d) L'organisateur demande 20 € pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

10 On dispose de deux dés non truqués que l'on jette successivement.
On note X le plus grand des deux numéros obtenus (si l'on obtient deux fois le même numéro, X est égal à ce numéro).
Déterminer la loi de probabilité de X.

11 On lance deux fois de suite un dé non truqué.
On note les numéros dans l'ordre.
On note X la somme des numéros.
1°) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2°) Déterminer la loi de probabilité de X.

12 Un joueur lance un dé. S'il obtient un numéro différent de 6, il reçoit une somme égale au numéro obtenu (en euros). S'il obtient 6, il doit verser 6 €. Ce joueur joue cent fois de suite. Il obtient les résultats suivants :

4, 6, 1, 2, 5, 2, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 1, 6, 6, 4, 2, 2, 1, 4,
6, 4, 2, 6, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 3, 4, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 5, 5,
3, 3, 5, 4, 1, 3, 1, 3, 2, 4, 5, 6, 4, 4, 3, 6, 2, 6, 5, 6,
3, 4, 6, 3, 4, 5, 3, 1, 5, 1, 3, 5, 6, 1, 5, 3, 4, 2, 2, 4,
1, 5, 1, 4, 6, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 6, 1, 2, 3, 3, 3.

1°) Ordonner les données brutes ci-dessus. Préciser l'effectif et la fréquence de chaque modalité.
2°) Quel est le mode de cette série?
3°) On s'intéresse maintenant au gain du joueur (noté négativement s'il s'agit d'une perte).
Construire un tableau montrant les gains et leurs effectifs.
Calculer le gain moyen par partie du joueur.

Réponses

1 1°) On fait un arbre de probabilité. A droite, on écrit les valeurs de X pour chaque résultat.

2°) Il y a 12 résultats possibles. X peut prendre les valeurs : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

$P(\mathrm{X}=1)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$; $P(\mathrm{X}=2)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; $P(\mathrm{X}=3)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau :

x_i	1	2	3	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	Total = 1

Remarque : on peut éventuellement laisser les résultats des probabilités sous forme fractionnaire non simplifiée (avec des dénominateurs égaux à 12).

Question non demandée : calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3}{2}$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{5}{9}$ et $\sigma(\mathrm{X})=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\boxed{2}$ 2°) Il y a 8 résultats possibles pour l'expérience aléatoire.

X peut prendre les valeurs : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $x_4 = 3$.
On présente la loi de probabilité de X dans un tableau.

x_i	0	1	2	3	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total =1

3°) $E(X) = 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$, $V(X)=\frac{3}{4}$ (utiliser la formule de Koenig-Huygens) et $\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de la variance

1ère méthode : $V(X)=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

2e méthode : $V(X)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{12}{4}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

$\boxed{3}$ Tableau donnant la loi de probabilité de X.

x_i	1	6	– 2	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	Total =1

$E(X)=-\frac{1}{6}$

$V(X)=1^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}+(-2)^2\times\frac{4}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{53}{6}-\frac{1}{36}=\frac{317}{36}$

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{317}}{6}$

$\boxed{4}$ 1°) Noter V_1, V_2, V_3 les trois boules vertes, R_1 et R_2 les boules rouges et N la boule noire.
Il y a 36 résultats possibles.

2°) a) $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{6}$ b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ (car les événements A et B sont incompatibles).

3°)
a) Les valeurs prises par X sont : 0, 5, 10, *a*, 2*a*, 5 + *a*.

b)

x_i	0	5	10	a	$2a$	$5+a$	
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	Total =1

c) $E(X)=\frac{10+a}{3}$

$\boxed{5}$ 1°) a) 12 b) $p=\frac{1}{4}$ 2°) X est la différence entre la valeur en euros de la carte tirée et la mise.

X peut prendre les valeurs : $x_1 = 13-5=8$, $x_2=11-5=6$, $x_3=5-5=0$, $x_4=3-5=-2$, $x_5=1-5=-4$.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

$P(X=8)=P(\text{"tirer un as"})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$P(X=6)=P(\text{"tirer un roi ou une dame"})=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

$P(X=0)=P(\text{"tirer un valet, un 10 ou un 9"})=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$

$P(X=-2)=P(\text{"tirer un 8"})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$P(X=-4)=P(\text{"tirer un 7"})=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

x_i	8	6	0	– 2	– 2	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	Total =1

Remarque : pour le calcul de l'espérance, il n'est pas forcément utile d'écrire les probabilités sous la forme de fractions irréductibles ; on peut très bien les laisser avec un dénominateur égal à 32 (ça simplifie les calculs).

$E(X)=\sum_{i=1}^{i=5}x_i\times P(X=x_i)=8\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{8}-2\times\frac{1}{8}-4\times\frac{1}{8}=...=\frac{7}{4}$

$\boxed{6}$ 2°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.
$P(A)=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{2}{9}$
3°) a)

x_i	0	1	2	4	5	8	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	Total =1

b) $E(\mathrm{X})=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}$; $V(\mathrm{X})=\frac{52}{9}$

c) M appartient au disque $D \Leftrightarrow \mathrm{OM} \leq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow \mathrm{X} \leq 3$

$$P(\mathrm{C})=P(\mathrm{X}\leq 3)=P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)+P(\mathrm{X}=2)=\frac{4}{9}$$

7 1°)

Nombre d'appareils	Avec le défaut A	Sans le défaut A	Total
Avec le défaut B	8	4	12
Sans le défaut B	8	180	188
Total	16	184	200

2°)
a) X peut prendre les valeurs $x_1=95$, $x_2=105$, $x_3=110$, $x_4=120$ (en fonction du (des) défaut(s)).
Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

x_i	95	105	110	120	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{180}{200}=0{,}9$	0,04	0,02	0,04	Total =1

95 € : pour ceux qui n'ont aucun défaut (il y en a 180)
105 € : pour ceux qui ont le défaut A et pas le défaut B (il y en a 8)
110 € : pour ceux qui ont le défaut B et pas le défaut A (il y en a 4)
120 € : pour ceux qui ont les deux défauts (il y en a 8)

b) $\mu=E(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{i=4} x_i \times P(\mathrm{X}=x_i)=96{,}7$

Le prix coût moyen d'un appareil est de 96,7 €.

3°) a) Non. 96,7 > 96
L'usine réalise une perte de 0,7 € en moyenne.
b) Il faut que l'usine le vende à 106,7 € pour réaliser un bénéfice de 10 € par appareil.

8 Faire une représentation en patatoïde.

1°) Nombre de tiges du lot L qui ne présentent :
a) que le défaut D_1 : 6 ;
b) que le défaut D_2 : 4 ;
c) ni le défaut D_1 ni le défaut D_2 : 100 – 12 = 88

2°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

a) A : « la tige choisie présente les deux défauts »
$P(\mathrm{A})=0{,}02$

b) B : « la tige choisie présente un défaut et un seul »
$P(\mathrm{B})=\frac{10}{100}=0{,}12$

c) C : « la tige choisie ne présente aucun des deux défauts ».
$P(\mathrm{C})=0{,}88$

3°) a) Une tige peut présenter 0, 1 ou 2 défauts donc X peut prendre les valeurs $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ (on trouve ces valeurs par « logique » et non par calcul).
b)

$P(\mathrm{X}=0)=P(\text{"la tige ne présente aucun défaut"})=P(\mathrm{C})=0{,}88$

$P(\mathrm{X}=1)=P(\text{"la tige présente un seul défaut"})=P(\mathrm{B})=0{,}1$

$P(\mathrm{X}=2)=P(\text{"la tige présente les deux défauts"})=P(\mathrm{A})=0{,}02$

x_i	0	1	2	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	0,88	0,1	0,02	Total =1

c) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P(\mathrm{X}=x_i)=0{,}14$

$\mathrm{V}(\mathrm{X})=1^2\times 0{,}1+2^2\times 0{,}02-(0{,}14)^2=0{,}1604$ (on applique la formule de Koenig- Huyghens)

9 1°) b) $P(\mathrm{A})=\frac{3}{25}$ c) $P(\mathrm{B})=\frac{2}{5}$ d) $P(\mathrm{C})=\frac{14}{25}$

2°) a) $P(\text{"gagner 100 euros"})=\frac{1}{25}$

b)

x_i	0	10	30	100	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{8}{25}=0{,}32$	$\frac{6}{25}=0{,}24$	$\frac{10}{25}=0{,}4$	$\frac{1}{25}=0{,}04$	Total =1

c) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=18{,}4$
d) Le jeu ne sera pas équitable.

10 Loi de probabilité de X

x_i	1	2	3	4	5	6	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	Total =1

Le plus grand des deux numéros est 2 : il y a 3 résultats possibles ((1 ; 2), (2 ; 1), (2 ; 2))

11 1°) X peut prendre les valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12.

2°) Loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	Total =1

12 1°) Pour obtenir les résultats des lancers de façon méthodique et sûre, on peut cocher tous les « 1 », puis tous les « 2 », etc. On vérifie bien ensuite que tous les nombres ont été cochés et que l'on a cent valeurs.
On obtient :
l, l, l, l, l, l, l, l, l, l, l, l, l, l, l,
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2,
3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,
5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,
6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Effectifs et fréquences des modalités :

Modalité	1	2	3	4	5	6
Effectifs	15	15	22	18	13	17
Fréquences	0,15	0,15	0,22	0,18	0,13	0,17

2°) Le mode de la série est 3. C'est la modalité ayant l'effectif le plus grand.
3°) a) Le gain du joueur est + l, + 2, + 3, + 4, + 5, si le dé amène respectivement 1, 2, 3, 4, 5, et – 6 (il s'agit d'une perte) si le dé amène 6. La série des gains est donc la suivante :

Gains	0	1	2	3	4	5
Effectifs	17	15	15	22	18	13

b) Le gain moyen est $m=\frac{146}{100}=1{,}46$ €.
On peut aussi utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice pour effectuer le calcul.