1ère S — Exercices sur les fonctions polynômes du second degré

1 Dans chaque cas, dresser sans rédiger le tableau de variation de la fonction *f*.

1°) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ 2°) $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 1$ 3°) $f : x \mapsto x - 2x^2$

Faire les tableaux à la règle ainsi que les flèches de variation.
Calculer dans chaque cas la valeur de l'extremum et mettre cette valeur dans le tableau de variations.

Rédiger des phrases pour exprimer ces variations selon le modèle :
« *f* est croissante sur l'intervalle …. et décroissante sur l'intervalle …. »

2 Même question que dans l'exercice précédent. Il est demandé de ne pas développer les expressions des fonctions.

1°) $f : x \mapsto 3(x-1)^2 - 4$ 2°) $f : x \mapsto 3 - (x+2)^2$ 3°) $f : x \mapsto -2x^2 + 5$ 4°) $f : x \mapsto -1 + 2x^2$

3 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Faire le tableau de variations de *f*.
2°) Recopier et compléter la phrase :
« $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet S(… ; …) tournée vers le …. ».
Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	–4	–3,5	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$													

Faire un graphique sur une page complète.
Tracer le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en prenant le centimètre pour unité graphique. Placer les points du tableau précédent (sous la forme de « points » et non de « croix »).
Mettre des pointillés et les valeurs sur les axes pour le sommet.
Tracer $\mathcal{C}$ en reliant les points précédents « à la main » en tenant compte du tableau de variations.
On soignera particulièrement l'allure de la courbe au voisinage du sommet.
Marquer le nom de la courbe en indiquant son équation.
Contrôler sur la calculatrice graphique.

4 Mêmes questions que dans l'exercice **3** avec la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

5 Mêmes questions que dans l'exercice **3** avec la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

6 Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 1$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le point $A(-1\,;-5)$ appartient-il à $\mathcal{C}$? Le point $B\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?

On veillera à bien présenter les calculs.

7 Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = 2x^2 + x - 3$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

On rédigera ainsi :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (O*x*) sont solutions de l'équation ……….. ».
On conclura ainsi $\mathcal{C} \cap (Ox) = \{I\,;J\}$ avec I (… ; …) et J (… ; …).
Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

8 Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 1$ et *D* la droite d'équation $y = x - 4$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D*.

On rédigera ainsi :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe *D* sont solutions de l'équation ……….. ».
On conclura ainsi $\mathcal{C} \cap D = \{I\,;J\}$ avec I (… ; …) et J (… ; …).
Vérifier en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

9 Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 2x - 1$ et *D* la droite d'équation $y = x + 1$.
Le but de l'exercice est d'étudier par le calcul la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite *D* c'est-à-dire que l'on cherche à savoir sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*, sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessous de *D* et en quel(s) point(s) $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes.

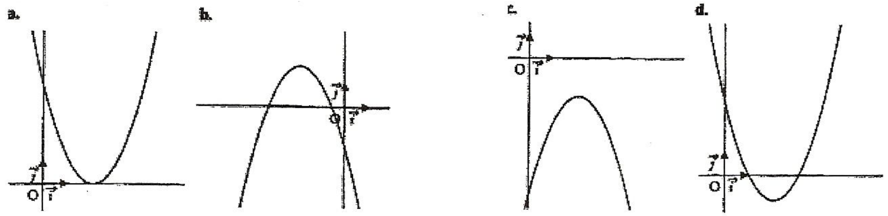
Etudier le signe de la différence $f(x) = (x^2 + 2x - 1) - (x + 1) = x^2 + x - 2$ au moyen d'un tableau de signes puis rédiger une conclusion sur le modèle suivant :

- Si $x \in$........., alors $\mathcal{C}$ est ………… de *D*.
- Si $x \in$........., alors $\mathcal{C}$ est ………… de *D*.
- $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes aux points d'abscisses ……. .

Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

10 Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les paraboles d'équation respectives $y = -x^2 + 3x + \frac{5}{4}$ et $y = x^2 - 5x + \frac{19}{4}$ dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Etudier par le calcul la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
On précisera en particulier les points d'intersection des deux paraboles.
Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

11 Sur chaque graphique est représentée une fonction trinôme *f* définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a \neq 0$.



On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Compléter le tableau :

	Figure a	**Figure b**	**Figure c**	**Figure d**
Signe de *a*				
Nombre de racines				
Signe de Δ				

$\boxed{12}$ Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer *a*, *b*, *c* sachant que $\mathcal{C}$ a pour sommet S(4 ; 13) et coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 5.

$\boxed{13}$ Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les paraboles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' d'équations respectives $y = (x-1)^2$ et $y = -x^2 + 6x - 5$.

1°) Tracer les paraboles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sur un même graphique.
On commencera par préciser :
- leurs sommets respectifs S et S' ;
- le sens de leurs concavités respectives.

2°) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
On rédigera ainsi le début :
« Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont solutions de l'équation ……….. ».
On conclura ainsi : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{\text{A} ; \text{B}\}$ avec A (… ; …) et B (… ; …).
Contrôler les résultats en utilisant une calculatrice graphique ou en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

$\boxed{14}$ Pour tout réel *m*, on note $\mathcal{C}_m$ la parabole d'équation $y = x^2 - 2mx + 6m$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Vérifier que toutes les paraboles $\mathcal{C}_m$ passent par le point Ω(3 ; 9).
2°) Soit S le sommet de $\mathcal{C}_m$.
Calculer les coordonnées de S en fonction de *m* ; en déduire que S appartient à une parabole fixe Γ dont on donnera une équation. Que représente Ω pour Γ ?
3°) Tracer Γ.

$\boxed{15}$ Soit ABCD un carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On considère les points I, J, K, L respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD], [DA] tels que AI = BJ = CK = DL = x.
Faire une figure en prenant la droite (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).
Coder les segments [AI], [BJ], [CK], [DL] qui sont de même longueur.
On admettra que le quadrilatère IJKL est un carré (la démonstration est cependant facile).
1°) Exprimer l'aire de IJKL en fonction de *x* (et de *a*).
2°) Pour quelle valeur de *x* l'aire de IJKL est-elle minimale ?

$\boxed{16}$ Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Γ la parabole d'équation $y = x^2$.
Dans chaque cas, compléter la phrase.
1°) $\mathcal{C}$: $y = x^2 - 3$.
On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur ………………………….. .
2°) $\mathcal{C}$: $y = (x-2)^2$.
On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur ………………………….. .
3°) $\mathcal{C}$: $y = (x+1)^2$.
On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur ………………………….. .
4°) $\mathcal{C}$: $y = (x-1)^2 - 3$.
On passe de Γ à $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur ………………………….. .

Réponses

$\boxed{1}$ **Variations d'un fonction polynôme du second degré donnée sous forme développée**

On ne rédige pas dans cet exercice.

Dans chaque cas, la fonction *f* est une fonction polynôme du second degré donnée par une expression développée réduite (pas forcément ordonnée).
On applique la règle donnant les variations d'une fonction polynôme du second degré.

1°)

f est croissante sur l'intervalle [1 ; +∞[et décroissante sur l'intervalle] – ∞ ; 1].

On inclut 1 dans les deux intervalles (ce n'est que quand on a une V.I. qu'on ne l'inclut pas).
C'est « crochets fermés » dans les deux intervalles.

La notion de « croissante en 1 » n'a pas de sens.
On dit que la fonction est croissante **sur** un intervalle ou décroissante **sur** un intervalle.

$2 = f(1)$

2 est le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$; il est obtenu pour $x = 1$ (ou il est atteint **en** $x = 1$).

2 **Variations d'une fonction polynôme donnée sous forme canonique**

Dans chaque cas, la fonction *f* est une fonction polynôme du second degré dont l'expression est donnée sous forme canonique (la variable apparaît à un seul endroit).

Ne pas développer les expressions des fonctions (on pourrait évidemment le faire et appliquer la règle appliquée dans l'exercice **1**). On va appliquer la propriété bis du cours (variations d'une fonction polynôme du second degré donnée par une expression sous forme canonique). Il n'y a pas de calcul à faire.

3°) et 4°) L'expression de la fonction est bien mise sous forme canonique. Il serait possible dans ce cas d'appliquer la 1ère propriété mais il vaut mieux voir ces expressions comme des formes canoniques (ce n'est pas toujours évident pour les élèves de reconnaître une forme canonique pour un polynôme incomplet en *x*).

5 1°) $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet $S\left(1\,;\frac{3}{2}\right)$, tournée vers le « bas ».

6 $A \in \mathcal{C}$; $B \notin \mathcal{C}$

Présentation des calculs :

$-{x_A}^2+3x_A-1=...=-3$

On peut aussi introduire la fonction *f* définie par $f(x)=-x^2+3x-1$. La 1ère méthode est préférable.

7 $\mathcal{C} \cap (Ox)=\{I\,;J\}$ avec $I\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$ et J (1 ; 0)

10 On étudie le signe de la différence $D(x)=\left(x^2-5x+\frac{19}{4}\right)-\left(-x^2+3x+\frac{5}{4}\right)$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad D(x)=2x^2-8x+\frac{7}{2}$

Le polynôme $D(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{7}{2}$ et $x_2=\frac{1}{2}$.

On peut présenter l'étude dans un tableau.

Remarque :

On ne met jamais « y_1 », « y_2 » ou « y' » dans une équation de droite.
On laissera *y* dans tous les cas contrairement aux calculatrices qui mettent Y_1 et Y_2.

Retenir que pour une équation de courbe, on doit toujours laisser *y* : on n'a rien le droit de rajouter, ni $y_{\mathcal{C}}$, ni y', ni y_1, ni y_2 …

11 **Tableau à compléter :**

	Figure a	Figure b	Figure c	Figure d
Signe de *a*	+	–	–	+
Nombre de racines	1	2	0	2
Signe de Δ	0	+	–	+

Pour le signe de *a*, on regarde la concavité de la parabole : si la concavité est tournée vers les « *y* positifs », alors
$a>0$; si la concavité est tournée vers les « *y* négatifs », alors $a<0$.
Pour le nombre de racines du polynôme, on regarde le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses :
- s'il y a deux points d'intersection, alors le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$;
- s'il y a un point d'intersection, alors le polynôme admet une racine dans $\mathbb{R}$;
- s'il n'y a aucun point d'intersection, alors le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Le signe de Δ se déduit du nombre de racines.

12 On obtient le système $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4\\ f(4)=13\\ f(0)=5\end{cases}$ d'où $\begin{cases}b=-8a\\ 16a+4b+c=13\\ a\times 0+b\times 0+c=5\end{cases}$.

$y=-\frac{x^2}{2}+4x+5$

13 1°) Présentation des calculs des coordonnées du sommet S : S $\left|\begin{array}{l} x_S=1\\ y_S=(x_S-1)^2=0\end{array}\right.$.

Quand on effectue le tracé, on constate que le sommet de chaque parabole est situé sur l'autre ce que l'on retrouvera dans la question suivante par le calcul.

2°) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont solutions de l'équation $x^2-4x+3=0$.
2 méthodes : discriminant réduit ou racine évidente.
Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' =\{A\,;B\}$ avec A (1 ; 0) et B (3 ; 4).

En fait, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' =\{S\,;S'\}$

14 1°) Présentation des calculs : ${x_\Omega}^2-2mx_\Omega+6m=.....=9=y_\Omega$

2°) $\Gamma : y=-x^2+6x$; Ω est le sommet de Γ.

15 Il s'agit d'un **problème d'optimisation**.

Hypothèses :

ABCD carré de côté *a* ($a>0$).
I ∈ [AB], J ∈ [BC], K ∈ [CD], L ∈ [DA] tels que AI=BJ=CK=DL = *x* .

On admet que IJKL est un carré (attention, ce n'est pas une hypothèse ; cela résulte d'une démonstration que l'on ne fait pas ici car l'énoncé demande d'admettre ce résultat).

1°) Pour calculer l'aire du carré IJKL, il y a deux méthodes :
1ère méthode : on peut dire que l'aire du carré IJKL est égale à l'aire du carré ABCD moins l'aire des triangles IBJ, JCK, KDL, LAI. Ces quatre triangles sont isométriques.

On obtient : $\mathcal{A}_{\text{IJKL}} = a^2 - 4\dfrac{x(a-x)}{2} = 2x^2 - 2ax + a^2$.

2^{e} méthode : On calcule IJ^2 (inutile de calculer IJ car on aura besoin du carré de IJ).
Le triangle IBJ est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$\text{IJ}^2 = \text{IB}^2 + \text{BJ}^2$ d'où $\text{IJ}^2 = (a-x)^2 + x^2$ soit $\text{IJ}^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

$\mathcal{A}_{\text{IJKL}} = \text{IJ}^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 2ax + a^2$.
Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré.
Ses coefficients sont : $\alpha = 2$; $\beta = -2a$; $\gamma = a^2$.

$-\dfrac{\beta}{2\alpha} = ... = \dfrac{a}{2}$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\dfrac{a}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$f\left(\dfrac{a}{2}\right)$	$\nearrow$

$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = ... = \dfrac{a^2}{2}$

L'aire du carré IJKL est minimale pour $x = \dfrac{a}{2}$.
Dans ce cas, I, J, K, L sont les milieux des côtés.

N.B. : on aurait aussi pu appliquer directement le résultat sur les extremums d'une fonction polynôme du second degré sans faire le tableau de variation.

Classification des exercices par compétences

Compétence	Exercices
Etudier les variations d'une fonction polynôme du second degré	$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$.
Tracer la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré	$\boxed{2}$, $\boxed{11}$ et $\boxed{12}$.
Déterminer si un point appartient ou non à une parabole	$\boxed{3}$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection d'une parabole avec l'axe des abscisses.	$\boxed{4}$.
Déterminer la position relative de deux paraboles	$\boxed{5}$ et $\boxed{8}$.
Savoir relier des propriétés géométriques d'une parabole à celles de la fonction trinôme qu'elle représente	
Résoudre un problème d'optimisation	$\boxed{10}$.