1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les polynômes de degré quelconque

1 Déterminer la forme développée, réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes de x les polynômes suivants :

$\mathrm{A}(x)=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+x\right)^2$; $\mathrm{B}(x)=(x+2)^3(x-2)$; $\mathrm{C}(x)=(5-x)^3(x+5)^2$; $\mathrm{D}(x)=\left(x^5-1\right)^2\left(x^5+1\right)^2$;

$\mathrm{E}(x)=\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)$.

Essayer de trouver chaque fois la solution la plus astucieuse c'est-à-dire la plus économique en calculs.
Vérifier en utilisant un logiciel de calcul formel.

2 Les fonctions polynômes $f : x \mapsto (4x-3)^2+5x-7$ et $g : x \mapsto 2\left(8x^2+1\right)-19x$ sont-elles égales ?

3 On considère les polynômes $P(x)=2x^2-x+1$ et $Q(x)=x^3+2$.
Donner l'écriture développée réduite de $f(x)=P(x)Q(x)$ et $g(x)=Q(x+1)-Q(x)$.

4 1°) On considère la fonction f définie par $f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2$.

La fonction f est-elle une fonction polynôme ?

2°) Même question avec la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$.

5 On considère le polynôme $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ où n est un entier naturel quelconque non nul.

Vérifier que 0, -1 et $-\dfrac{1}{2}$ sont racines de $f(x)$.

6 On considère le polynôme $f(x)=2x^3-9x^2-8x+15$.

1°) Déterminer une racine « évidente » de $f(x)$.

2°) En déduire une factorisation de $f(x)$.

On veillera à rédiger très soigneusement.
3°) Déterminer les racines de $f(x)$.

Vérifier en utilisant un logiciel de calcul formel.

7 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x\in\mathcal{D}\quad f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

8 Soit n un entier naturel non nul.
Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x.

$P(x)=\left(x^n+2\right)\left(x^n-2\right)^2+2\left(x^{2n}-4\right)-\left(x^n-2\right)\left(x^n+2\right)$

$Q(x)=\left(x^{2n}-x^n\right)^2-\left(x^n-x\right)+\left(x^{2n}+1\right)^2$

9 Dans chaque cas, existe-t-il un réel m tel que
1°) 1 soit racine du polynôme $P(x)=2x^3-mx^2+x+1$;

2°) 2 soit racine du polynôme $Q(x)=x^4+5x^2-mx+6$.

10 On considère la fonction f définie par $f(x)=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^3+\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)^3$.

La fonction f est-elle une fonction polynôme ?

11 Quel est le degré du polynôme $P(x)=\left(m^2-1\right)x^3+(1-m)x^2+mx+2-m$? On discutera suivant les valeurs du paramètre m.

Réponses

1 Pour vérifier les résultats, on peut utiliser un logiciel de calcul formel.
$\mathrm{A}(x)=-2x^3-3x^2+1$; $\mathrm{B}(x)=x^4+4x^3-16x-16$; $\mathrm{C}(x)=-x^5+5x^4+50x^3-250x-625x+3125$;

$\mathrm{D}(x)=x^{20}-2x^{10}+1$; $\mathrm{E}(x)=x^4+1$.

Quelques réécritures pour simplifier les calculs :

Pour $\mathrm{B}(x)$, écrire : $\mathrm{B}(x)=\underbrace{(x+2)^2}_{\text{id. remarquable}}\ \underbrace{(x+2)(x-2)}_{\text{id. remarquable}}$ ou utiliser l'identité remarquable cubique $(a+b)^3$ pour développer $(x+2)^3$ mais cette dernière méthode est un peu plus longue et donc moins astucieuse.

Pour $\mathrm{C}(x)$, écrire : $\mathrm{C}(x)=(5-x)\left[(5-x)(5+x)\right]^2=(5-x)\left(25-x^2\right)^2=\ldots$

Pour $\mathrm{D}(x)$, penser à écrire : $\mathrm{D}(x)=\left[\left(x^5-1\right)\left(x^5+1\right)\right]^2=\left(x^{10}-1\right)^2$

« englober » tout dans un carré puis
appliquer l'identité remarquable
$(a+b)(a-b)$

Pour $\mathrm{E}(x)$, penser à écrire : $\mathrm{E}(x)=\left[\left(x^2+1\right)+x\sqrt{2}\right]\left[\left(x^2+1\right)-x\sqrt{2}\right]=\left(x^2+1\right)^2-\left(x\sqrt{2}\right)^2=\ldots$ (identité remarquable).

3 $f(x)=2x^5-x^4+x^3+4x^2-2x+2$; $g(x)=3x^2+3x+1$ (remarque : $Q(x)=x^3+2$ donc $Q(x+1)=(x+1)^3+2=x^3+3x^2+3x+1+2=x^3+3x^2+3x+3$; on utilise l'identité remarquable $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

4 Dans les deux cas, il faut commencer par donner l'ensemble de définition de f. C'est $\mathbb{R}$ dans les deux cas.

1°) On utilise les identités remarquables $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$. On trouve : $f(x)=2x^2+4$ (polynôme du second degré incomplet en x).
2°) A priori, f est une fonction rationnelle (c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes).
On trouve : $f(x)=x^2-1$ (polynôme du second degré incomplet en x).
Ainsi, on peut dire que f est une fonction polynôme (ce qui n'était pas du tout évident à priori ; toute fonction polynôme est une fonction rationnelle mais la réciproque est fausse).

$\boxed{5}$ D'abord une tentation à laquelle il faut résister : chercher à développer $(1+x)^{2n}$ avec l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c'est-à-dire écrire $(1+x)^{2n}=1+2x+x^{2n}$.
L'exposant est $2n$: ce n'est pas 2 ; l'identité remarquable ne s'applique pas (si $n=1$, l'exposant $2n$ est égal à 2, si $n=2$, l'exposant $2n$ est égal à 4, si $n=3$, l'exposant $2n$ est égal à 6 etc.).
Sinon, on trouve que $f(x)=0$ ce qui est évidemment faux.

On verra seulement l'année prochaine (avec la formule du binôme de Newton) comment développer $(1+x)^{2n}$.

Résolution proprement dite :

• Vérifions que 0 est une racine du polynôme.

On calcule $f(0)$.

$$f(0)=(0+1)^{2n}-0^{2n}-2\times 0-1=1^{2n}-1=1-1=0$$

• Vérifions que -1 est une racine du polynôme.

On calcule $f(-1)$.

$$f(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2\times(-1)-1=0^{2n}-1+2-1=-1+2-1=0$$

$2n$ est un entier pair (en effet, par définition, un entier pair est un multiple de 2).
On utilise le principe d'absorption des – par les exposants pairs.

$(-1)^{2n}=1$ (– 1 élevé à n'importe quelle puissance d'exposant pair donne 1)

• Vérifions que $-\frac{1}{2}$ est une racine du polynôme.

On calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1-1=0$$

Attention aux problèmes de syntaxe : parenthèses pour les nombres négatifs et pour les fractions élevés à une puissance.

Conclusion : On peut dire que 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de $f(x)$.

$\boxed{6}$ 1°) 1 est une racine évidente de $f(x)$ car $f(1)=2-9-8+15=0$
2°) On peut utiliser l'une des trois méthodes du cours : méthode des coefficients indéterminés, méthode par division euclidienne ou schéma de Hörner. On trouve : $f(x)=(x-1)(2x^2-7x-15)$.

Détail :

Comme 1 est racine de $f(x)$, $f(x)$ est factorisable par $x-1$.

Il existe donc un polynôme tel que $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)P(x)$.
Comme $\deg[f(x)]=3$, on a : $\deg[P(x)]=2$.

Point à développer avec la règle du cours :

$\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$

Ou si : si $\deg P=n$ et $\deg Q=m$, alors $\deg(PQ)=n+m$.

On pose $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.

On pose $g(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

$$\begin{aligned}g(x)&=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

$f=g$ si et seulement si $\begin{cases}a=2 & (1)\\ b-a=-9 & (2)\\ c-b=-8 & (3)\\ -c=15 & (4)\end{cases}$ (par identification des coefficients)

(4) donne $c=-15$.

Compte tenu de (1), (2) donne $b=-7$.

Pour $a=2$, $b=-7$, $c=-15$, le système est vérifié.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=(x-1)(2x^2-7x-15)$.

3°) Les racines du polynôme sont : $-\frac{3}{2}$; 1 ; 5.

Solution détaillée :

On doit résoudre l'équation $f(x)=0$.
Cette équation est successivement équivalente à :

$x-1=0$ ou $2x^2-7x-15=0$
$x=1$ ou $2x^2-7x-15=0$

Considérons le polynôme $2x^2-7x-15$.
Son discriminant est égal à $\Delta=49+4\times15\times2=169$.

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ x_1 et x_2.

$x_1=\frac{7+13}{4}\qquad x_2=\frac{7-13}{4}$

$x_1=5\qquad x_2=-\frac{3}{2}$

Les racines du polynôme sont $-\dfrac{3}{2}$; 1 ; 5.

$\boxed{7}$ 1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$ (f est une fonction rationnelle)
2°) On utilise la méthode des coefficients indéterminés.

On pose : $g(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$.

$\forall x \in \mathcal{D} \quad g(x)=\dfrac{x(a+b)+3a-2b}{(x-2)(x+3)}$

On identifie les coefficients des monômes de même degré au numérateur.

On obtient le système :

$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-2b=1 \end{cases}$ (système linéaire de deux équations à deux inconnues)

On trouve : $a=\dfrac{1}{5}$; $b=-\dfrac{1}{5}$.

$f(x)=\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}$

On fait ensuite la vérification (importante à faire pour détecter d'éventuelles erreurs).

Remarque concernant la forme $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+3}$**.**

La forme sera toujours donnée.
Ce n'est pas à l'élève de la trouver.

Explication d'élève :

$f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$ Là, y a 1.

Il n'y a aucun *x*.

On peut voir le 1 du numérateur comme égal à 0*x*+1.

$g(x)=\dfrac{x(a+b)+3a-2b}{(x-2)(x+3)}$

Donc $a+b=0$ et $3a-2b$ ça fait 1.

$\boxed{8}$ $P(x)=x^{3n}-x^{2n}-4x^{n}+4$; $Q(x)=2x^{4n}-2x^{3n}+3x^{2n}-x^{n}+x+1$

Solution détaillée :

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^n-2)(x^n+2)-(x^n-2)(x^n+2)$

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)\left[(x^n-2)+2-1\right]$ (on factorise puis on développe)

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)(x^n-2+2-1)$

$P(x)=(x^n+2)(x^n-2)(x^n-1)$

$P(x)=\left[(x^n)^2-2^2\right](x^n-1)$

$P(x)=(x^{2n}-4)(x^n-1)$

$P(x)=x^{3n}-x^{2n}-4x^n+4$

Ordonner suivant les puissances décroissantes de *x* : la plus grande puissance est x^{3n}.

$Q(x)=(x^{2n}-x^n)^2-(x^n-x)+(x^{2n}+1)^2$

$Q(x)=x^{4n}-2x^{3n}+x^{2n}-x^n+x+x^{4n}+2x^{2n}+1$

$Q(x)=2x^{4n}-2x^{3n}+3x^{2n}-x^n+x+1$

$\boxed{9}$ 1°) $m=4$ 2°) $m=21$

Rédaction type :

« … est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(....)=0$
si et seulement si ….. »

$\boxed{10}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$ (condition importante à toujours vérifier pour avoir une fonction polynôme)

On pose $X=\sqrt{x^2+1}$.

En utilisant les identités cubiques $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$ (et non a^3+b^3 qui donnerait des calculs plus longs), on obtient $f(x)=2+6X^2$ (c'est bien $f(x)$ qu'on exprime en fonction de *x* et non $f(X)$).
Donc, en remplaçant *X* par $\sqrt{x^2+1}$, on obtient :

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=2+6\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$

$f(x)=2+6(x^2+1)$

$f(x)=6x^2+8$

f est donc une fonction polynôme du second degré (incomplète).

$\boxed{11}$ $P(x)=(m^2-1)x^3+(1-m)x^2+mx+2-m$

Le monôme de plus haut degré qui apparaît dans l'écriture développée de $P(x)$ est x^3.

Le coefficient de x^3 est m^2-1.

$m^2-1=0$ si et seulement si $m=1$ ou $m=-1$

On discute suivant les valeurs de *m*.

1^er^ cas : $m\neq 1$ et $m\neq -1$

Dans ce cas, on a : $m^2-1\neq 0$.

Donc $\deg\left[P(x)\right]=3$.

2^e^ cas : $m=1$

Dans ce cas, $P(x)=x+1$.

Donc $\deg\left[P(x)\right]=1$.

3^e^ cas : $m=1$

Dans ce cas, $P(x)=2x^2-x+3$.

Donc $\deg\left[P(x)\right]=2$.

Corrections détaillées

$\boxed{1}$ Calculs de polynômes

Présenter les calculs en colonnes.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=(x^2-1)^2-(x^2+x)^2\\&=(x^4-2x^2+1)-(x^4+2x^3+x^2)\\&=-2x^3-3x^2+1\quad\text{(polynôme de degré 3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(x)&=(x+2)^3(x-2)\\&=(x^3+6x^2+12x+8)(x-2)\quad\text{(on utilise l'identité remarquable cubique : }(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\text{)}\\&=(x-2)(x^3+6x^2+12x+8)\\&=x^4+4x^3-16x-16\quad\text{(polynôme de degré 4)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{C}(x)&=(5-x)^3(x+5)^2\\&=(125-75x+15x^2-x^3)(x^2+10x+25)\end{aligned}$$

(on utilise l'identité remarquable cubique : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$)

$$=-x^5+5x^4+50x^2-625x+3125\quad\text{(polynôme de degré 5)}$$

$$\mathrm{D}(x)=(x^5-1)^2(x^5+1)^2$$

1^ère^ méthode	2^e^ méthode (plus astucieuse)
$\mathrm{D}(x)=(x^{10}-2x^5+1)(x^{10}+2x^5+1)$ $=$............ $=x^{20}-2x^{10}+1$ (polynôme de degré 20)	$\mathrm{D}(x)=\left[(x^5-1)(x^5+1)\right]^2$ $=(x^{10}-1)^2$ $=x^{20}-2x^{10}+1$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x)&=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)\\&=\left[(x^2+1)+x\sqrt{2}\right]\left[(x^2+1)-x\sqrt{2}\right]\\&=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2\quad\text{(identité remarquable }(a+b)(a-b)=a^2-b^2\text{)}\\&=x^4+1\quad\text{(polynôme de degré 4 en }x\text{)}\end{aligned}$$

On vérifie tous ces résultats grâce à un logiciel de calcul formel.

Remarque :

On pourrait aussi factoriser $\mathrm{A}(x)$ (ce n'est pas demandé dans l'énoncé).

1^ère^ méthode :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=(x^2-1)^2-(x^2+x)^2\\&=(2x^2+x-1)(-1-x)\\&=-(2x^2+x-1)(1+x)\end{aligned}$$

Puis on pourrait factoriser le trinôme du second degré.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=-(2x-1)(x+1)(1+x)\\&=-(2x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

2^e^ méthode :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x)&=\left[(x-1)(x+1)\right]^2-\left[x(x+1)\right]^2\\&=(x+1)^2\left[(x-1)^2-x^2\right]\\&=(x+1)^2(-2x-1)\\&=-(2x-1)(x+1)^2\end{aligned}$$

2 **Egalité de fonctions polynômes**

$f : x \mapsto (4x-3)^2 + 5x - 7$; $g : x \mapsto 2(8x^2+1) - 19x$

$\boldsymbol{D}_f = \boldsymbol{D}_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (4x-3)^2 + 5x - 7$
$= 16x^2 - 24x + 9 + 5x - 7$
$= 16x^2 - 19x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2(8x^2+1) - 19x$
$= 16x^2 - 19x + 2$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)$.

Donc $f = g$.

3 **Calculs de polynômes**

$P(x) = 2x^2 - x + 1$; $Q(x) = x^3 + 2$

$f(x) = P(x)Q(x)$
$= (2x^2 - x + 1)(x^3 + 2)$
$= 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 2$

$g(x) = \left[(x+1)^3 + 2\right] - (x^3 + 2)$
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2 - x^3 - 2$
$= 3x^2 + 3x + 1$

4 **Reconnaissances de fonctions polynômes**

1°) $f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)^2$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)^2$
$= x^2 + 1 \cancel{- 2\sqrt{x^2+1}} + 1 + x^2 + 1 \cancel{+ 2\sqrt{x^2+1}} + 1$
$= 2x^2 + 4$

Donc f est une fonction polynôme (du second degré).
N.B. : L'expression est incomplète en x.

2°) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$
$= \dfrac{(x^2 - 1)\cancel{(x^2 + 1)}}{\cancel{x^2 + 1}}$
$= x^2 - 1$

Donc f est une fonction polynôme (du second degré).

N.B. : L'expression est incomplète en x.

Travail personnel

Séquence bac p.41 Tous les exercices.

Exercices utilisant un logiciel de calcul formel

Pour les exercices suivants, on utilisera un logiciel de calcul formel, par exemple XCas.

Dans chaque cas, donner une factorisation du polynôme $P(x)$.
Vérifier cette factorisation « à la main » sur papier.

1 $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$.
2 $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$.
3 $P(x) = 6x^3 - x^2 - 4x + 3$.
4 $P(x) = x^3 - 15x - 4$.
5 $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

$\boxed{1}$ Donner une factorisation du polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ (on vérifie que 2 est une racine).

$\boxed{2}$ Donner une factorisation du polynôme $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ (1 et 2 sont racines).

$\boxed{3}$ Donner une factorisation du polynôme $P(x) = 6x^3 - x^2 - 4x + 3$ (– 1 est racine).

$\boxed{4}$ Donner une factorisation du polynôme $P(x) = x^3 - 15x - 4$ (4 est racine).

Résoudre l'équation $P(x) > 0$.

$\boxed{5}$ Donner une factorisation du polynôme $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ (1 est racine évidente).