1ère S   Exercices sur le barycentre de trois points ou plus

1 On considère un triangle ABC quelconque.
On note G le barycentre des points pondérés (A ; 4), (B ; 1) et (C ; –1).
1°) Construire G.
Pour la figure, on prendra la droite (AB) « horizontale » ; A à gauche de B ; C au-dessus de la droite (AB) ; tous les angles du triangle aigus.
Cette disposition est souvent la plus commode pour le cerveau.
2°) Démontrer que la droite (AG) est parallèle à (BC).

2 Soit ABC un triangle quelconque.
On note G le point tel que $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
1°) Construire G en respectant la disposition préconisée dans l'exercice précédent.
On laissera apparentes les constructions vectorielles effectuées.
2°) Exprimer G comme barycentre des points A, B, C pondérés par des coefficients de pondération que l'on définira.

3 Soit ABCD un parallélogramme.
Pour la figure, on adoptera la disposition suivante : droite (AB) « horizontale » ; A à gauche de B ; C et D au-dessus de la droite (AB).
Exprimer D comme barycentre des points A, B, C affectés de coefficients de pondération que l'on définira.
Indication : chercher une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

4 Soit A, B, C trois points quelconques du plan.
Pour tout point M on pose $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.
Démontrer que $\vec{u}$ est un vecteur constant indépendant de M que l'on exprimera en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5 Dans le plan *P* muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A(2\,;-1)$, B(4 ; 2) et C(3 ; 1).
Pour tout réel *m*, on note G le barycentre des points pondérés $(A\,;2m+1)$, $(B\,;m-2)$ et $(C\,;-3m+2)$.
Justifier que G existe.
1°) Calculer les coordonnées de G.
2°) Exprimer y_G en fonction de x_G. En déduire que G appartient à une droite fixe *D* dont on donnera l'équation réduite.

6 Soit ABC un triangle quelconque. On note G le barycentre des points pondérés (A ; – 2), (B ; 3), (C ; 1) et *g* le barycentre des points pondérés (A ; – 2) et (B ; 3).
1°) Construire *g* et G.
2°) Que représente le point G pour le segment [C*g*] ?

7 Dans le plan *P* muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère trois points quelconques $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$.
On note G l'isobarycentre des points des points A, B, C.
Calculer les coordonnées de G.

8 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; – 3) et (C ; 4).
On note également J le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (C ; 2).
1°) Construire I et J.
2°) Démontrer que J est le milieu du segment [BI].

9 Soit ABCD un rectangle.
Pour la figure, on prendra la droite (AB) horizontale ; A à gauche de B ; la droite (CD) au-dessus de la droite (AB).
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|$.
Représenter *E* sur une <u>figure codée</u>.

10 Soit A et B deux points quelconques du plan *P* tels que l'on ait AB = 8.
Déterminer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que l'on ait $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| \leq 4$.

11 Soit ABCD un rectangle.
Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1), (D ; 2).
Construire G en utilisant un seul barycentre partiel judicieusement choisi.
Faire une figure codée en respectant la disposition demandée dans l'exercice **9**.

12 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].
Faire une figure codée.
Exprimer J comme barycentre des points pondérés A, B, C affectés de coefficients à déterminer.

13 Soit ABC un triangle quelconque.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que le vecteur $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.
Représenter l'ensemble *E* sur une figure codée.

14 Soit ABCD un carré.
On note G le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; – 3) et (C ; 2).
1°) Construire G.
2°) Démontrer que B et G sont symétriques par rapport à D.

15 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
On note J le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (C ; 2).
1°) Construire I et J.
2°) Soit G le point d'intersection des droites (CI) et (BJ).
Démontrer que G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3), (C ; 2).
Indication : on notera G' le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3), (C ; 2).

16 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le barycentre des points pondérés (A ; – 1) et (B ; 3), J le barycentre des points pondérés (A ; – 1) et (C ; 2) et K le barycentre des points pondérés (B ; 3) et (C ; 2).
Démontrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

17 Soit ABC un triangle quelconque.
On note G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).

La droite (CG) coupe la droite (AB) en un point I.
Exprimer I comme un barycentre partiel.
En déduire $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

18 Soit ABC un triangle quelconque.
Soit O un point quelconque du plan.
On note I le point tel que OABI soit un parallélogramme ; J le point tel que OBCJ soit un parallélogramme ; K le point tel que OCAK soit un parallélogramme.
Démontrer que O est le centre de gravité de IJK.

19 Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu du segment [IJ].
Pour tout réel k différent de -2, on note G le barycentre des points pondérés (A ; k), (B ; 1) et (C ; 1).
1°) Démontrer que G appartient à la droite (AI).
2°) Déterminer k tel que G est le milieu du segment [AI].

20 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
On note O le centre de son cercle circonscrit.
1°) Calculer OA en fonction de a.
2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = a\sqrt{3}$.

Travail personnel

Contrôle continu

p.260 Exercices 5, 6, 7, 8.
p.261 Exercices 9 et 10.

Séquence bac

Ancienne édition	Nouvelle édition
p.273 Exercices 2 et 5.	p.275 Exercices 2 et 5.
p.274 Exercice 6.	p.276 Exercice 6.
p. 281 Exercices 1, 2, 3.	p. 282 Exercices 1 et 3

Interros des lycées

p.243 Exercices 1 et 2.
p.244 Exercices 3 et 4.
p.245 Exercices 5, 6, 7.
p.247 Exercice 9.

Corrigés

9 Déterminons l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$.

① Soit I le milieu de [AB] et J celui de [CD].
D'après la relation fondamentale, $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$.

② Recherche de l'ensemble E (sous la forme d'une chaîne d'équivalences)

M $\in E$ si et seulement si $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\|$
si et seulement si $\left\| 2\overrightarrow{MI} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MJ} \right\|$
si et seulement si $|\,2\,| \times \left\| \overrightarrow{MI} \right\| = |\,2\,| \times \left\| \overrightarrow{MJ} \right\|$
si et seulement si $2\mathrm{MI} = 2\mathrm{MJ}$
si et seulement si $\mathrm{MI} = \mathrm{MJ}$

③ Conclusion (identification de E)

E est <u>la</u> médiatrice de [IJ].

Figure.

10 Déterminons l'ensemble E des points M de P tels que l'on ait $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| \leq 4$.

① Soit I le barycentre de (A ; 1) et (B ; 1).
I est le milieu de [AB].
D'après la relation fondamentale, $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

② Recherche de l'ensemble E (sous la forme d'une chaîne d'équivalences)

M $\in E$ si et seulement si $\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| \leq 4$
si et seulement si $\left\| 2\overrightarrow{MI} \right\| \leq 4$
si et seulement si $|\,2\,| \times \left\| \overrightarrow{MI} \right\| \leq 4$
si et seulement si $2\mathrm{MI} \leq 4$
si et seulement si $\mathrm{MI} \leq 2$

③ Conclusion (identification de E)

E est le disque fermé de centre I et de rayon 2.

Figure.

12 J est le milieu de [AI] donc J est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (I ; 2).
I est le milieu de [BC] donc I est le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (C ; 1).
D'après la règle d'associativité du barycentre, J est le barycentre des points pondérés (A ; 2), (B ; 1) et (C ; 1).

13 Déterminons l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que le vecteur $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires.

Soit G le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (C ; 1).
G est le milieu de [BC].

D'après la relation fondamentale, $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

M $\in E$ si et seulement si $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
si et seulement si $2\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
si et seulement si $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Conclusion : *E* est la droite passant par G et parallèle à (AC).

14 Ecrire les hypothèse au début de l'exercice.

Hypothèses : ABCD carré
G barycentre de (A ; 2), (B ; - 3) et (C ; 2).

1°) $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$

On construit aisément le point G.

2°) Démontrons que B et G sont symétriques par rapport à D.

On a $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$.
Or ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.
Par conséquent, $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BD}$.
On en déduit que D est le milieu de [BG].
Par suite, B et G sont symétriques par rapport à D.

15 **Hypothèses :** ABC triangle quelconque.
I est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3).
J est le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2)
(BJ) $\cap$ (CI) = {G}

1°) Construction de I et J (égalités de position) :

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2°) Démontrons que G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3), (C ; 2).

Soit G' le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3), (C ; 2).

Par hypothèse, I est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3).
Donc par associativité du barycentre, G' est le barycentre des points pondérés (I ; 4) et (C ; 2).
Par conséquent, G' $\in$(CI).

Par hypothèse, J est le barycentre de (A ; 1) et (C ; 2).
Donc par associativité du barycentre, G' est le barycentre des points pondérés (J ; 3) et (C ; 3).
Par conséquent, G' $\in$(BJ).

G' est donc le point d'intersection de (CI) et (BJ).
On en déduit que G' = G.
Donc G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3), (C ; 2).

16 Hypothèses : ABC un triangle quelconque.
I : barycentre de (A ; – 1) et (B ; 3)
J : barycentre de (A ; – 1) et (C ; 2)
K : barycentre de (B ; 3) et (C ; 2).

Démontrons que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; – 1), (B ; 3) et (C ; 2).

Par hypothèse, I est le barycentre de (A ; – 1) et (B ; 3).
Donc par associativité du barycentre, G est le barycentre de (C ; 2) et (I ; 2).
Par conséquent, G $\in$ (CI).

Par hypothèse, J est le barycentre de (A ; – 1) et (C ; 2).
Donc par associativité du barycentre, G est le barycentre de (K ; 5) et (A ; – 1).
Par conséquent, G $\in$ (AK).

G est donc le point d'intersection des droites (CI), (BJ) et (AK).
(CI) $\cap$ (BJ) $\cap$ (AK) = {G}

Conclusion : Les droites (CI), (BJ) et (AK) sont concourantes en G.

17 Soit I' le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).

G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 2) et (C ; 3).
Donc par associativité du barycentre, est le barycentre de (I' ; 3) et (C ; 3).
G est donc l'isobarycentre de C et I' et par suite, G est le milieu de [CI'].
On en déduit que C, I' et G sont alignés.
I' $\in$(CG).
De plus, I' $\in$ (AB) donc I' est le point d'intersection de (CG) et (AB).
On en déduit que I = I'.

Conclusion : I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2) et par suite, $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

18 Hypothèses : ABC triangle.
OABI, OBCJ, OCAK sont des parallélogrammes.

Démontrons que O est le centre de gravité de IJK.

OABI est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AB}$.
OBCJ soit un parallélogramme donc $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{BC}$.
OCAK soit un parallélogramme donc $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{CA}$.

Donc $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Par suite, O est l'isobarycentre des points I, J, K et donc O est le centre de gravité de IJK.