$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur le second degré (1)**

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3(4-x^2)-(x-2)(x+1)=0$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3+x^2-4x-4=0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-1}=-1$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(5x-1)^2-4(x-1)^2=0$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1°) $x^2-x-6=0$ 2°) $x^2+3x+1=0$ 3°) $x^2-5x+7=0$.

6 Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$x^2+3x-m=0$ (E) suivant les valeurs de m.

On effectuera une discussion.
On conclura la discussion sur le modèle suivant :

- Si $m>...$, alors l'équation (E) ….
- Si $m<...$, alors l'équation (E) ….
- Si $m=...$, alors l'équation (E) ….

7 Dans chaque cas, factoriser le polynôme $P(x)$.

1°) $P(x)=-2x^2+x+3$ 2°) $P(x)=x^2-x-2$ 3°) $P(x)=3x^2+x-4$

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+1}{x}\geq\dfrac{5x+2}{x+1}$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide du discriminant réduit l'équation $x^2-10x-8=0$. A changer de place

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x-5}{x^2+3x-4}<0$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x-1\leq\dfrac{4}{x-2}$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{x}-6=0$.

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4+x^2-6\geq 0$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2-2x\sqrt{3}+1>0$.

15 Déterminer un polynôme f du second degré vérifiant les deux conditions

C_1 : $f(-1)=f(2)=0$

C_2 : $f(0)=4$

16 La somme de trois entiers relatifs consécutifs est égale à leur produit.
Quelles sont les valeurs possibles de ces entiers ?
On respectera les quatre étapes habituelles en écrivant les titres suivants :
1°) Choix de l'inconnue
2°) Mise en équation et condition
3°) Résolution
4°) Conclusion

Réponses

1 On factorise le premier membre. $S=\left\{2\ ;\ -\dfrac{7}{4}\right\}$

Technique N°1 : factoriser

Technique N°2 : développer (cette technique « marche » ici mais est moins naturelle que la 1ère).

$\boxed{\textbf{2}}$ $S = \{-1\ ;\ 2\ ;\ -2\}$

$\boxed{\textbf{3}}$ Commencer par donner les valeurs interdites : 1 et – 1.

On prend $x^2 - 1$ pour dénominateur.

$S = \{-2\}$.

$\boxed{\textbf{4}}$ $S = \left\{\frac{3}{7}\ ;\ -\frac{1}{3}\right\}$

$\boxed{\textbf{5}}$ On utilise le discriminant à chaque fois avec toute la rédaction du cours.

1°) $S = \{-2\ ;\ 3\}$ (on peut aussi utiliser une racine évidente de l'équation en rédigeant comme dans le cours).

2°) $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3°) L'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Solutions détaillées

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 6 = 0$ (1).

Considérons le polynôme $x^2 - x - 6$.

Recensement des coefficients :

$a = 1\ ;\ b = -1\ ;\ c = -6$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-1)^2 - 4\times1\times(-6)\\ &= 25\end{aligned}$$

On a : $\Delta > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} \qquad x_2 = \frac{1+5}{2}$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$$

$$\boxed{S_1 = \{-2\ ;\ 3\}}$$

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ (2).

Considérons le polynôme $x^2 + 3x + 1$.

Recensement des coefficients :

$a = 1\ ;\ b = 3\ ;\ c = 1$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= 9 - 4\\ &= 5\end{aligned}$$

On a : $\Delta > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{S_2 = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$.

Considérons le polynôme $x^2 - 5x + 7$.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-5$; $c=7$

Calcul du discriminant
$\Delta=25-4\times7$
$=-3$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{S_3=\varnothing}$

6 (E) est une équation du second degré (*m* est un **paramètre**).
Son discriminant est égal à $\Delta=9+4m$.

Ce discriminant a un signe qui varie suivant les valeurs de *m*.

On fait une **discussion mathématique** suivant les valeurs du paramètre *m*.

m	$-\infty$		$-\frac{9}{4}$		$+\infty$
Signe de $9+4m$		$-$	0	$+$	

Discussion :

- Si $m<-\frac{9}{4}$, alors $\Delta<0$; dans ce cas, (E) n'admet aucune racine réelle.
- Si $m>-\frac{9}{4}$, alors $\Delta>0$; dans ce cas, (E) admet deux racines réelles.
- Si $m=-\frac{9}{4}$, alors $\Delta=0$; dans ce cas, (E) admet une racine double réelle.

7 **Factorisation de polynômes du second degré**

1°) Les racines de $P(x)$ sont – 1 (racine évidente) et $\frac{3}{2}$ (obtenue par produit).

$P(x)=-2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x+1)(3-2x)$

2°) Les racines de $P(x)$ sont – 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

$P(x)=(x+1)(x-2)$

3°) Les racines de $P(x)$ sont 1 (racine évidente) et $\frac{3}{2}$ (obtenue par produit).

$P(x)=3(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)=(x-1)(3x+4)$

Dans chaque cas, on peut vérifier le résultat en développant le résultat.
On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel.

8 $S=\left]-1\,;\,\frac{-1}{2}\right]\cup\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$

Solution détaillée :

0 et – 1 sont valeurs interdites.

On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}\setminus\{0\,;\,-1\}$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

L'inéquation est successivement équivalente à :

$\frac{x+1}{x}-\frac{5x+2}{x+1}\geq0$

$\frac{(x+1)^2-x(5x+2)}{x(x+1)}\geq0$

$\frac{x^2+2x+1-5x^2-2x}{x(x+1)}\geq0$

$\frac{-4x^2+1}{x(x+1)}\geq0$

$$\frac{(1-2x)(1+2x)}{x(x+1)} \geq 0$$

On fait un tableau de signes.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $S=\left\{5-\sqrt{33}\ ;\ 5+\sqrt{33}\right\}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $S=\left]-\infty\ ;\ -4\right[\cup\left]1\ ;\ 5\right[$

Solution détaillée :

Considérons le polynôme x^2+3x-4.
Les racines sont 1 (racine évidente) et – 4 (obtenue par produit).
Ce polynôme est du signe positif sauf pour x à l'extérieur des racines et négatif pour x entre les racines.

x	$-\infty$		-4		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
x^2-3x+4		$+$	$0^{\text{déno}}$	$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
$\dfrac{x-5}{x^2+3x-4}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

$\boxed{\mathbf{11}}$ $S=\left]-\infty\ ;\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left]2\ ;\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$

Solution détaillée :

2 est une valeur interdite.

On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$$x-1\leq\frac{4}{x-2}$$

$$(x-1)-\frac{4}{x-2}\leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)-4}{x-2}\leq 0$$

$$\frac{x^2-3x-2}{x-2}\leq 0$$

Considérons le polynôme x^2-3x-2.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-3$; $c=-2$

Calcul du discriminant

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=17$$

On a : $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2 :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x+4		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-3x-2}{x-2}$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

$S = \left]-\infty \ ; \ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left]2 \ ; \ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$

12 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x+\sqrt{x}-6=0$

On pose $X=\sqrt{x}$ (changement d'inconnue).
L'équation s'écrit : $X^2+X-6=0$ (c'est l'équation « résolvante »).

Considérons le polynôme X^2+X-6 (du second degré en *X*).

2 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha \times 2 = \frac{-6}{1}$

$\alpha = -3$

Les racines du polynôme sont $X_1=1$ et $X_2=-3$.
Or $X=\sqrt{x}$.
Donc $\sqrt{x}=2$ ou $\sqrt{x}=-3$ (impossible)

$x=4$ ou $x=-1$.

$S=\{\ 4\ \}$

13 $S = \left]-\infty \ ; \ -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2} \ ; \ +\infty\right[$

14 $S=\mathbb{R}\setminus\{\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

Résolution détaillée :

Considérons le polynôme $3x^2-2x\sqrt{3}+1$.

$a=3$; $b=-2\sqrt{3}$; $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=0$

Le polynôme admet donc une racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D'après la règle du signe du trinôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
SGN de $3x^2-2x\sqrt{3}+1$		+	0	+	

Conclusion :

$S=\left]-\infty\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$ ou $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Commentaires :

● On pourrait aussi utiliser le discriminant réduit.

● Quand on trouve $\Delta=0$, c'est qu'on est passé à côté d'une identité remarquable.

L'inéquation est successivement équivalente à :

$\left(x\sqrt{3}-1\right)^2>0$

$x\sqrt{3}-1\neq 0$

$x\neq\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{15}$ Penser à utiliser la forme factorisée d'un polynôme du second degré.
On obtient $f(x) = -2(x+1)(x-2)$.

Solution détaillée :

D'après la condition C_1, le polynôme $f(x)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: – 1 et 2.

On peut donc dire que son discriminant Δ est strictement positif.
Le polynôme peut donc se factoriser sous la forme :
$f(x) = a(x+1)(x-2)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

D'après la condition C_2, $f(0) = 4$ donc $a(0+1)(0-2) = 4$ d'où $a \times 1 \times (-2) = 4$ soit $a = -2$.

Conclusion : $f(x) = -2(x+1)(x-2)$.

On peut éventuellement développer le polynôme si on le souhaite, mais ce n'est pas nécessaire.

$\boxed{16}$ **Quelques explications utiles :**

On dit que des entiers sont **consécutifs** pour exprimer qu'ils se suivent.
Par exemple, les entiers 3, 4, 5, 6, 7 sont des entiers consécutifs.

Lorsque l'on a trois entiers consécutifs, on appelle **entier du milieu** celui qui n'est ni le plus petit, ni le plus grand. Par exemple, parmi les entiers consécutifs 7, 8, 9, l'entier du milieu est 8.

Ici, pour résoudre le problème, il y a un bon choix d'inconnue à faire : prendre pour inconnue le nombre du « milieu ». On trouve trois possibilités :
– 1 ; 0 ; 1 ou 1 ; 2 ; 3 ou – 1 ; –2 ; –3.

Détail du début.

Choix de l'inconnue :

Soit x l'entier du milieu parmi les trois entiers consécutifs cherchés.
L'entier précédent (le prédécesseur) est alors $x-1$; l'entier suivant (le successeur) est alors $x + 1$.
(A priori, il s'agit d'un problème à trois inconnues mais on se ramène à un problème à une seule inconnue).

Mise en équation et condition :
x vérifie l'équation : $(x-1)+x+(x+1)=(x-1)x(x+1)$
$x \in \mathbb{Z}$

Résolution :
Ne pas utiliser Δ ; il faut factoriser.

Exercices d'entraînement sur le second degré (travail personnel)

Séquence bac

p. 23 Exercices 1, 2, 3 (sauf c) et d)), 4, 5, 6, 7
p. 34 Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Contrôle continu

p.21 Exercice 1
p. 22 Exercices 2, 3, 5
p.23 Exercice 6, 7, 8 (entier naturel à deux chiffres), 10
p.24 Exercice 11 et Contrôle

LEXIQUE

Fonction polynôme du second degré **Fonction trinôme**	Fonction f vérifiant les deux conditions : C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ C_2 : il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$.
Polynôme du second degré	Expression de la forme $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ (x : la variable du polynôme)
Coefficients	a, b, c (N.B. : $a \neq 0$) c : coefficient constant
Polynôme du second degré incomplet	$b = 0$ ou $c = 0$
Racine d'un polynôme $ax^2 + bx + c$	Valeur de x qui annule le polynôme ou solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
Racine évidente	Racine que l'on trouve facilement ou que l'on trouve par calcul mental (souvent 0, 1, 2, – 1, – 2)
Forme canonique	$a(x - \alpha)^2 + \beta$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$ Sert à déterminer le nombre de racines du polynôme suivant son signe et à donner leurs expressions.
Discriminant réduit	$b' = \dfrac{b}{2}$ $\Delta' = b'^2 - ac$

Ce chapitre permet de revoir les notions associées aux équations : inconnue, ensemble de résolution, changement de d'inconnue.

Pour une équation il y a deux notions d'ensembles associés :

ensemble de résolution

équation

ensemble des solutions