$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur le barycentre de deux points

1 Soit A et B deux points du plan.
Traduire par une égalité vectorielle la phrase suivante :
G est le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 2).

2 Soit A et B deux points du plan.
Dans chacun des cas suivants, justifier que le point G défini par l'égalité vectorielle donnée est le barycentre des points A et B pondérés par des coefficients que l'on définira.
1°) $2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
2°) $\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GB}$
3°) $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$

3 Soit ABC un triangle quelconque.
On note I le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 2) ; on note J le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (C ; 2).
1°) Construire I et J.
2°) Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles en utilisant les vecteurs.

4 Soit A et B deux points tels que AB = 5.
On note G le barycentre des points pondérés (A ; −8) et (B ; 3).
1°) Construire G.
2°) Calculer AG.

5 Soit A et B deux points tels que $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$.
Exprimer G comme barycentre des points pondérés (A ; *a*) et (B ; *b*).

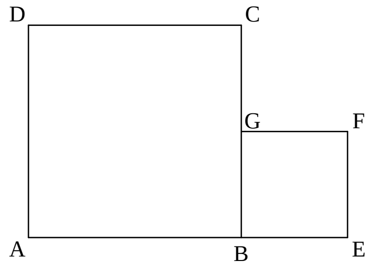
6 Soit A et B deux points.
On note G_1 le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 3).
On note G_2 le barycentre des points pondérés (A ; −2) et (B ; 7).
Construire G_1 et G_2 sur une même figure.
Préciser la position de G_1 et G_2 par rapport à B.

7 Soit ABCD un parallélogramme.
On note I le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
On note J le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (D ; 3).
Déterminer la nature du quadrilatère AICJ.

8 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(5\ ;\ -3)$.
Calculer les coordonnées du point G barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).

9 Soit A et B deux points du plan.
On note G le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 3).
Soit M un point quelconque du plan.
Simplifier les sommes vectorielles $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$; $4\overrightarrow{MA}+6\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$.

10 On considère deux plaques homogènes ABCD et EFGB de forme carrée.



Déterminer la position du centre d'inertie K du système obtenu en accolant ces deux plaques sachant que $BE=\frac{1}{2}AB$.
Centre d'inertie = centre de gravité
Centre d'inertie d'une plaque carrée = son centre e

11 Soit A et B deux points du plan.
On note I le milieu du segment [AB].
Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
Illustrer cette propriété en faisant la construction vectorielle sur une figure codée.

Réponses

1 $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

2 1°) (A, 2) et (B, 5) ; 2°) (A, 1) et (B, 3) ; 3°) (A, 6) et (B, – 4)

3 Pour la figure, prendre (BC) horizontale, B à gauche de C, A au-dessus de (BC).
Pour placer I et J, on peut écrire les égalités de position puis utiliser la construction de partage des segment à l'aide des parallèles.

$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Une autre astuce consiste à tracer un triangle ABC de hauteur 5 petits carreaux ou 10 petits carreaux afin de bénéficier du quadrillage pour diviser les segments [AB] et [AC] en 5.

Ne pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès mais faire une démonstration vectorielle en prouvant que $\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

On écrit en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=\ldots$ puis on utilise les égalités de position écrites précédemment.

4 D'après les égalités de position, on a : $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{BG}=\frac{8}{5}\overrightarrow{BA}$).

La longueur est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AG}$

$AG = \| \overrightarrow{AG} \| = \left\| -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \right\| = \left| -\frac{3}{5} \right| \times \| \overrightarrow{AB} \| = \frac{3}{5} \times AB = \frac{3}{5} \times 5 = 3$

On applique la règle : $\| k\,\vec{u} \| = |\,k\,| \times \| \vec{u} \|$.

Attention : double barre pour les vecteurs (norme) ; barre simple pour le nombre (valeur absolue).

$\boxed{5}$ L'égalité $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ est équivalente à $\overrightarrow{AG} = 3\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right)$ (relation de Chasles).

$$-2\,\overrightarrow{AG} - 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{GA} - 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

On a : $2 - 3 \neq 0$, donc cette égalité exprime que G est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; – 3).

$\boxed{6}$ Ecrire les hypothèses avant la résolution de l'exercice.

D'après les égalités de position, on a : $\overrightarrow{BG_2} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BG_1} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$.

Par suite, on a : $\overrightarrow{BG_2} = -\overrightarrow{BG_1}$.

Donc B est le milieu du segment [G_1 G_2] donc G_1 et G_2 sont symétriques par rapport à B.

$\boxed{7}$ Faire un figure pour placer les points. Marquer les graduations pour le partage des segments [AB] et [DC] en 4.
Ecrire les hypothèses au début de l'exercice.
On utilise les vecteurs.

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{JC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. Or ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et par suite $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JC}$.

On en déduit que le quadrilatère AICJ est un parallélogramme.

$\boxed{8}$ On utilise la formule donnant les coordonnées d'un barycentre.
Deux présentations possibles :
Présenter les calculs en système (avec une accolade) ou grâce à une barre verticale :

G a pour coordonnées : ou $\quad \mathrm{G}\left|\begin{array}{l} x_G = \ldots \\ y_G = \ldots \end{array}\right.$

$$\begin{cases} x_G = \ldots \\ y_G = \ldots \end{cases}$$

On trouve : $G\left(\frac{7}{2} ; -\frac{7}{4}\right)$.

$\boxed{9}$ On utilise la relation fondamentale ($a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$).

G est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 3) donc d'après la relation fondamentale, on a :
$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$

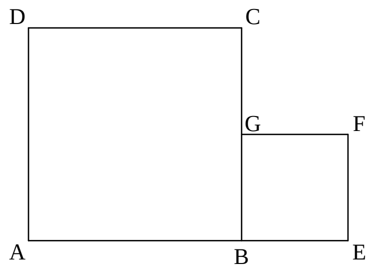
G est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 3) donc d'après la propriété d'homogénéité, G est aussi le barycentre des points pondérés (A ; 4) et (B ; 6).
D'après la relation fondamentale, on a : $4\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} = 10\overrightarrow{MG}$.

De même, $\overrightarrow{MA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{MG}$.

$\boxed{10}$ On pose $BE = a$.

Soit I le centre du carré ABCD et J celui du carré BEFG.
L'aire de ABCD est $\mathcal{A} = 4a^2$ et l'aire de BEFG est $\mathcal{A}' = a^2$.
Le centre de gravité K du système est le barycentre des points pondérés (I, $4a^2$) et (J, a^2) donc par homogénéité des points pondérés (I, 4) et (J, 1).
D'après l'égalité de position, on a : $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}$.

On peut donc construire le point K.



$\boxed{11}$ I est le milieu du segment [AB] donc I est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 1).
D'après la relation fondamentale, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (1+1)\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MI}$.

LEXIQUE

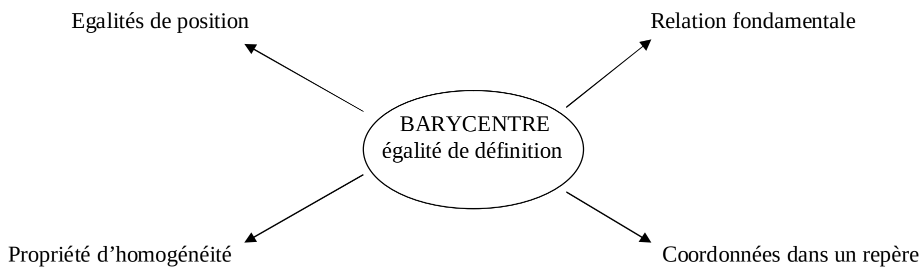
Barycentre	Le barycentre du point A affecté du coefficient a et du point B affecté du coefficient b est l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
Points pondérés	Points affectés de coefficients. On note (A ; a) et (B ; b).
Coefficients de pondération	Coefficients a et b (valeurs des masses en physique).
Masse totale	Somme des coefficients. Elle doit toujours être non nulle. (Si elle est égale à 0, alors le barycentre n'existe pas).
Isobarycentre de points	Les deux coefficients sont égaux. 2 points : milieu du segment

RECAPITULATIF DES PROPRIETES

Propriété d'homogénéité

Relation fondamentale ($\forall M \in P \quad a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$)

Coordonnées dans un repère



Exercices d'entraînement sur le second degré (travail personnel)

Séquence bac

p.23 Exercices 1, 2, 3 (sauf c) et d)), 4, 5, 6, 7
p.34 Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Contrôle continu

p.21 Exercice 1
p.22 Exercices 2, 3, 5
p.23 Exercice 6, 7, 8 (entier naturel à deux chiffres), 10
p.24 Exercice 11 et Contrôle