$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur l'utilisation des fonctions de référence

1 Comparer calculatrice :

$\boxed{\dfrac{1}{\pi-1} \text{ et } \dfrac{1}{\pi-2}}$ $\boxed{(\pi-4)^2 \text{ et } (\pi-5)^2}$ $\boxed{\left(\sqrt{2}-1\right)^3 \text{ et } \left(\sqrt{2}-2\right)^3}$

2 Déterminer le signe de x^3-8 suivant les valeurs de x. Faire un tableau de signes.

3 On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)^2-1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction *f* sur chacun des intervalles $I_1 = [3\,;+\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,;3]$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit *u* et *v* deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u < v$.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $3 \leq u < v$.
Etape 1 : $0 \leq u-3 < v-3$.
Etape 2 : $0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2$.
Etape 3 : $-1 \leq (u-3)^2-1 < (v-3)^2-1$.

On a donc $f(u) < f(v)$.

La fonction *f* est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**
A l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de *f* sur I_2.

3°) **Tableau de variation**
Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.
Le tableau doit être fait à la règle ainsi que les flèches de variations.
Calculer la valeur de l'extremum global.
Contrôler le résultat à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto (x+1)^2+3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Etudier le sens de variation de la fonction *f* sur chacun des intervalles $I_1 = [-1\,;+\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,;-1]$ en utilisant la méthode des inégalités successives.
Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de l'extremum global.
Contrôler le résultat à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur.

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-1$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction *f* sur chacun des intervalles $I_1 =]0\,;+\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,;0[$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit *u* et *v* deux réels quelconques de l'intervalle I_1 tels que $u < v$.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $0 < u < v$.
Etape 1 : $\dfrac{1}{u} > \dfrac{1}{v}$.
Etape 2 : $\dfrac{1}{u}-1 > \dfrac{1}{v}-1$.
On a donc $f(u) > f(v)$.

La fonction *f* est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**

A l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de *f* sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}^*$. Contrôler graphiquement.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\,3\,\}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de la fonction *f* sur chacun des intervalles $I_1 =]3\,;+\infty[$ et $I_2 =]-\infty\,;3[$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit *u* et *v* deux réels de l'intervalle I_1.

Recopier et justifier chaque étape du raisonnement qui permet d'écrire les inégalités successives suivantes.

On a : $3 < u < v$.
Etape 1 : $0 < u-3 < v-3$.
Etape 2 : $\dfrac{1}{u-3} > \dfrac{1}{v-3}$.
Etape 3 : $-\dfrac{2}{u-3} < -\dfrac{2}{v-3}$.
On a donc $f(u) < f(v)$.

La fonction *f* est donc ……………………………………….. sur I_1.

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**

A l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de *f* sur I_2.
3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{ 3 \}$. Contrôler graphiquement.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x-4}{x+5}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ -5 \}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{ -5 \}$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{x+5} - 1$.

2°) En utilisant le résultat de la question 1°), déterminer le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $\mathrm{I}_1 = \left]-5 ; +\infty\right[$ et $\mathrm{I}_2 = \left]-\infty ; -5\right[$.

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{ -5 \}$. Contrôler graphiquement.

8 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ définie sur $\left]-\infty ; 5\right]$.

Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty ; 5\right]$ en utilisant la méthode des inégalités successives.

Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur de l'extremum global. Contrôler graphiquement.

9 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f.
Déterminer l'ensemble de définition de f en rédigeant scrupuleusement comme dans le cours.
On commencera par analyser les types de problèmes qui se posent.

① $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$	⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
② $f(x) = \sqrt{3-x}$	⑥ $f(x) = \sqrt{x^2+4}$
③ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$	⑦ $f(x) = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x+3}$
④ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$	⑧ $f(x) = \sqrt{5-x} + 2\sqrt{1+x}$

On rédigera ainsi :

« $f(x)$ existe si et seulement si …
si et seulement si …
si et seulement si … »

On conclura ainsi : $\mathcal{D}_f$ = …….

10 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f sans expliquer.

2°) Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

Compléter l'équivalence :

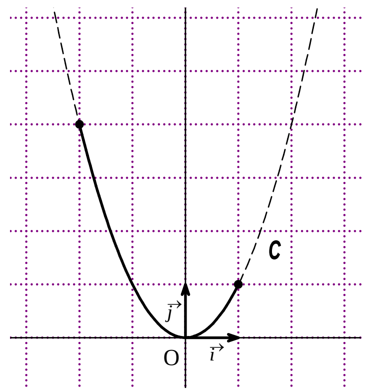
$\mathrm{M} \in \mathcal{C}$ si et seulement si ………..

11 Dans chaque cas, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f qui est la restriction à un intervalle I d'une fonction de référence.

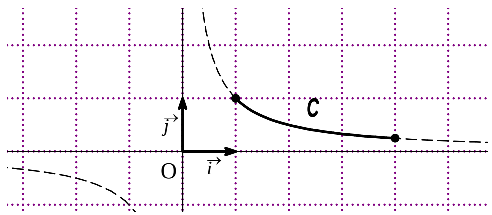
Dans chaque cas, recopier et compléter la phrase :

« La fonction f est la restriction de la fonction ………. (donner le nom de la fonction) à l'intervalle I = ….. ».

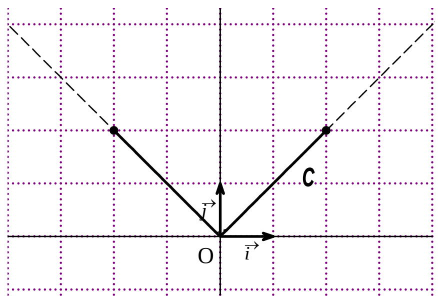
①



②



③



N.B. : On parle de **restriction** d'une fonction **à** un intervalle.

12 Dans chaque cas, déterminer la forme canonique du polynôme $f(x)$.

1°) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$

2°) $f(x) = 2x^2 + 10x - 2$

3°) $f(x) = x^2 + 6x$

4°) $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{5} + 1$

13 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

Le but de cette question est de déterminer le sens de variation *f* sur l'intervalle [0 ; +∞[en utilisant la méthode des inégalités successives.

Soit *u* et *v* deux réels quelconques tels que $0 \leq u < v$.

Recopier et compléter en justifiant chaque étape :

$0 \leq u < v$

$0 \ldots u^2 \ldots v^2$

$1 \ldots u^2+1 \ldots v^2+1$

$\dfrac{1}{u^2+1} \ldots \dfrac{1}{v^2+1}$

$\dfrac{2}{u^2+1} \ldots \dfrac{2}{v^2+1}$

Conclure : « La fonction f est ... sur [0 ; +∞[. »

14 Soit *x* un réel quelconque appartenant à l'intervalle [– 2 ; 5].

En procédant par encadrements successifs, déterminer le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{x-6}$.

On donnera la réponse sous la forme : $\ldots\ldots\ldots \leq \dfrac{1}{x-6} \leq \ldots\ldots\ldots$.

15 Dans chaque cas, la fonction *f* peut s'obtenir en enchaînant deux fonctions de référence *u* et *v*. Préciser lesquelles.

On présentera selon le modèle ci-dessous en refaisant un schéma à chaque fois.

f est la fonction définie par $f(x) = 3x^2$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend left, "f"] & x^2 \arrow[r, mapsto] & 3x^2 \\ & X \arrow[r, mapsto, "v"] & 3X \end{tikzcd}$$

On passe de *x* à $f(x)$ en enchaînant la fonction carrée $u : x \mapsto x^2$ suivie de la fonction linéaire $v : x \mapsto 3x$.

Faire les flèches à la règle (en respectant bien la notation de la flèche à talon « a pour image », avec une petite barre).

1°) $f(x) = (3x)^2$; 2°) $f(x) = 3x^2 - 1$; 3°) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ 4°) $f(x) = \dfrac{4}{x} - 2$ 5°) $f(x) = (3x-1)^2$

16 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{5x-1}{x}$.

1°) Vérifier que pour tout $x \neq 0$ $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire un enchaînement de fonctions de référence conduisant de *x* à $f(x)$.

17 Deux des enchaînements ci-dessous définissent la même fonction. Lesquelles ?

(1) On enchaîne la fonction carré, suivie de la fonction affine $x \mapsto -x+2$.

(2) On enchaîne la fonction affine $x \mapsto -x+2$ suivie de la fonction carré.

(3) On enchaîne la fonction carré, suivie de la fonction affine $x \mapsto x-2$.

(4) On enchaîne la fonction affine $x \mapsto x-2$ suivie de la fonction carré.

18 On enchaîne la fonction carré, suivie de la fonction racine carrée.

Cet enchaînement définit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser $f(x)$ en fonction de *x*.

Quelle est la fonction *f* définie par cet enchaînement ?

19 On enchaîne la fonction $u : x \mapsto x^2$, suivie de la fonction $v : x \mapsto x+1$, suivie de la fonction $w : x \mapsto \sqrt{x}$.

Cet enchaînement définit une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser $f(x)$ en fonction de *x*.

20 Dans chaque cas, la fonction *f* peut s'obtenir en enchaînant trois fonctions de référence *u*, *v*, *w*. Préciser lesquelles (il peut y avoir plusieurs solutions).

1°) $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^3$ 3°) $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$.

Corrigés

$\boxed{5}$ On peut aussi calculer $f(u)-f(v)$.
On évite ainsi la démarche algorithmique.

$\boxed{7}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x-4}{x+5}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Plusieurs remarques :

f est une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines).
La forme de $f(x)$ obtenue à la question 1°) est appelée forme canonique. La variable *x* n'apparaît qu'à un seul endroit.
On ne parle de forme canonique que pour des fonctions polynômes du second degré ou pour des fonctions homographiques.
Pour déterminer les variations, on se sert de la forme du 1°) (forme canonique).
On ne put pas dire que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ou sur $]-\infty\,;-5[\,\cup\,]-5\,;+\infty[$ (on ne parle que de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle).
Dans le tableau de variation de *f*, il y a une double barre sous le – 5 car la fonction n'est pas définie en – 5.
Graphiquement, la courbe représentative admet la droite d'équation $x=-5$ pour asymptote (on précisera beaucoup plus tard ce qu'est une asymptote, ce n'est pas exactement parce qu'il y a une valeur interdite).

$\boxed{8}$ Sur *Geogebra*, comment définir la fonction avec la racine carrée.

Pierre Alain Lecroart 2010

Comment faire une racine carrée dans Geogebra ?

Il suffit d'entrer : sqrt(….)
Exemple : sqrt (x – 1).

Guillaume Lachaud 2010

Pour la racine cubique, il faut faire x ^ $\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Et ainsi de suite

$\boxed{9}$ 1°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\,;-2\}$ 2°) $\boldsymbol{D} =]-\infty\,;3]$ 3°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$ 4°) $\boldsymbol{D} =]-\infty\,;-3[\cup[1\,;+\infty[$
5°) $\boldsymbol{D} =]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ 6°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$ 7°) $\boldsymbol{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\,;-3\}$ 8°) $\boldsymbol{D} = [-1\,;5]$.

Commentaire général :

Attention à la rédaction :
« $f(x)$ existe **si et seulement si** ……………. » ou « Pour que $f(x)$ existe, **il faut et il suffit que** … ».

3°) Le radicande (ce qui est sous la racine) est une différence.

4°) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \dfrac{x-1}{x+3} \geq 0 \end{cases}$ dénominateur non nul et radicande positif ou nul

si et seulement si $\begin{cases} x \neq -3 \\ \dfrac{x-1}{x+3} \geq 0 \end{cases}$

(On écrit un système ; en gros, le bas doit être non nul et le quotient doit être positif ou nul).

Il faut résoudre une inéquation avec un tableau de signes ; attention aux doubles barres pour la valeur interdite.
$\boldsymbol{D} =]-\infty\,;-3[\cup[1\,;+\infty[$

6°) Le radicande est une somme.

7°) On a deux quotients différents.

8°) système $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases}$

On résout ce système. Il s'agit d'une intersection d'intervalles.

$1 \leq x \leq 5$

Erreurs possible :

$f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\sqrt{x-2} \geq 0$
si et seulement si …

$\boxed{10}$ 1°) $\boldsymbol{D}$ = [–1 ; + ∞[

2°) M $\in \boldsymbol{C}$ si et seulement si $\begin{cases} x \in \boldsymbol{D} \\ y = \sqrt{x+1} \end{cases}$

$\boxed{11}$ On notera que pour une restriction utilise la préposition « à » et non de la préposition « sur ». On parle de restriction d'une fonction « à » un intervalle (et pas « sur »).
Comprendre le principe d'une restriction : on restreint l'ensemble de définition.

① La fonction *f* est la restriction de la fonction carré à l'intervalle I = [– 2, 1].
② La fonction *f* est la restriction de la fonction inverse à l'intervalle I = [1, 4].
③ La fonction *f* est la restriction de la fonction carré à l'intervalle I = [– 2, 2].

$\boxed{12}$ Formes canoniques

On « complexifie » à chaque fois l'écriture (on effectue une complexification de l'écriture) pour simplifier le problème.

Pour vérifier les résultats, on peut utiliser un logiciel de calcul formel tel que XCas.
Sinon, on développe le résultat obtenu pour vérifier que l'on obtient bien l'expression de départ (« on développe et on vérifier que l'on retombe sur l'expression de départ).

1°) $f(x) = -(x-1)^2 + 5$

2°) $f(x) = 2\left[\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{29}{4}\right] = 2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{29}{2}$

3°) $f(x) = (x+3)^2 - 9$

4°) $f(x) = \left(x-\sqrt{5}\right)^2 - 4$

N.B. : Il faut bien voir que ce sont des phrases quantifiées universellement de manière implicite (on peut néanmoins faire apparaître la quantification de manière explicite).

$\boxed{13}$ $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+1 \neq 0$
si et seulement si $x^2 \neq -1$ (toujours vrai)

L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

Soit u et v deux réels tels que $0 \leq u < v$.

$0 \leq u < v$
$0 \leq u^2 < v^2$ car deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
$1 \leq u^2+1 < v^2+1$ car ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
$\dfrac{1}{u^2+1} > \dfrac{1}{v^2+1}$ car deux réels positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
$\dfrac{2}{u^2+1} > \dfrac{2}{v^2+1}$ car multiplier par un même nombre strictement positif chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

On obtient : $f(u) > f(v)$
Donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

Attention à ne pas confondre les mots « inégalités » et « inéquations ».
Ici, il s'agit d'inégalités et non d'inéquations.

Exercices sur les enchaînements de fonctions de référence. Ces exercices permettent de travailler la notion de variable.

$\boxed{14}$ Technique mise en œuvre : encadrements successifs (technique algorithmique).

On procède par encadrements successifs (ou par « incorporations » successives de termes).

On donnera la réponse sous la forme : $\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \dfrac{1}{x-6} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$ (pas de phrase réponse à faire).

$\boxed{15}$ Enchaînement de fonctions de référence

Il doit y avoir deux fonctions, les deux fonctions doivent être des fonctions de référence.

Cet exercice permet de revoir la notation de la flèche à talon (on fait une petite barre) : flèche « a pour image », différente de la flèche sans talon « à valeur dans ».
On verra que la flèche sans talon a d'autres significations : flèche « tend vers ».
La flèche sert également à noter les vecteurs (flèches de vecteurs).

Cet exercice permet également de voir une démarche algorithmique (« c'est comme un algorithme »).

1°) $f(x) = (3x)^2$

$$x \xmapsto{\quad u \quad} 3x$$
$$X \xmapsto{\quad v \quad} (X)^2$$

Les parenthèses en rouge sont facultatives.

2°) $f(x) = 3x^2 - 1$

$$x \xmapsto{\quad u \quad} x^2$$
$$X \xmapsto{\quad v \quad} X - 1$$

3°)

4°) On fait une réécriture : $f(x) = 4 \times \dfrac{1}{x} - 2$.

$$x \xmapsto{\quad u \quad} \frac{1}{x}$$
$$X \xmapsto{\quad v \quad} 4X - 2$$

5°) $f(x) = (3x-1)^2$

$$x \xmapsto{\quad u \quad} 3x - 1$$
$$X \xmapsto{\quad v \quad} (X)^2$$

$\boxed{16}$ f est une **homographique**.

1°) Ecriture à l'aide du quantificateur $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f\left(x\right)=\dfrac{5x}{x}-\dfrac{1}{x}=5-\dfrac{1}{x}$ (principe de séparation des quotients).

2°) Utiliser le résultat du 1°) : la forme $f\left(x\right)=\dfrac{5x-1}{x}$ n'est pas utilisable.

$$X \xmapsto{\ u\ } \frac{1}{x}$$
$$X \xmapsto{\ v\ } 5-X$$

$\boxed{17}$ On note *f*, *g*, *h*, *i* les fonctions définies par les enchaînements des questions 1°), 2°), 3°), 4°).

1°) $f\left(x\right)=-x^2+2$

2°) $g\left(x\right)=\left(-x+2\right)^2$

3°) $h\left(x\right)=x^2-2$

4°) $i\left(x\right)=\left(x-2\right)^2$

Pour tout réel *x*, on a : $g\left(x\right)=i\left(x\right)$.
Les fonctions *g* et *i* sont égales.

$\boxed{18}$ On note *u* la fonction carré et *v* la fonction racine carrée.

$$x \xmapsto{\ u\ } x^2$$
$$X \xmapsto{\ v\ } \sqrt{X}$$

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \sqrt{X} \text{ avec } X=x^2 \\ &= \sqrt{x^2} \\ &= \left| x \right| \end{aligned}$$

La fonction *f* est la fonction valeur absolue.

$\boxed{19}$ On enchaîne la fonction $u : x \mapsto x^2$, suivie de la fonction $v : x \mapsto x+1$, suivie de la fonction $w : x \mapsto \sqrt{x}$.
Cet enchaînement définit une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.

$$x \xmapsto{\ u\ } x^2$$
$$X \xmapsto{\ v\ } X+1$$
$$Y \xmapsto{\ w\ } \sqrt{Y}$$

$f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}$

$\boxed{20}$ **Enchaînement de 3 fonctions de référence**

1°) $f\left(x\right)=2\left(x-1\right)^2-5$

$$x \xmapsto{\ u\ } x-1$$
$$X \xmapsto{\ v\ } X^2$$
$$Y \xmapsto{\ w\ } 2Y-5$$

La fonction *f* est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x-1$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto x^2$ (fonction carrée), suivie de la fonction $w : x \mapsto 2x-5$ (fonction affine).

2°) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x+1\right)^3$

$$x \xmapsto{\ u\ } x+1$$
$$X \xmapsto{\ v\ } X^3$$
$$Y \xmapsto{\ w\ } \frac{1}{2}Y$$

La fonction *f* est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x+1$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto x^3$ (fonction cube), suivie de la fonction $w : x \mapsto \dfrac{1}{2}x$ (fonction linéaire).

3°) $f\left(x\right)=1-\dfrac{3}{x+2}$

$$x \xmapsto{\ u\ } x+2$$
$$X \xmapsto{\ v\ } \frac{1}{X}$$
$$Y \xmapsto{\ w\ } 1-3Y$$

La fonction *f* est l'enchaînement de la fonction $u : x \mapsto x+2$ (fonction affine), suivie de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (fonction inverse), suivie de la fonction $w : x \mapsto 1-3x$ (fonction affine).