1ère S

Exercices sur les fonctions de référence

1 Déterminer par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction carrée.

2 Déterminer par le calcul les nombres qui sont confondus avec leur image par la fonction inverse.

3 Donner sans explication l'ensemble des solutions *S* de l'inéquation $x^2 \geq 9$.

4 Dans le plan muni d'un repère quelconque $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction inverse.
Soit *a* et *b* deux réels non nuls. On note A, B, C, D les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives *a*, *b*, $-a$ et $-b$.
Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

5 On note *f* la fonction carrée.
La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier
P : « Pour tous réels *a* et *b*, on a : $f\left(a \times b\right) = f\left(a\right) \times f\left(b\right)$. »

Cette propriété reste-t-elle valable pour les autres fonctions de référence en prenant *a* et *b* dans le domaine de définition de la fonction de référence considérée.

6 Comparer sans calcul les nombres $\pi - 3$, $\left(\pi - 3\right)^2$ et $\left(\pi - 3\right)^3$. Justifier.

7 Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse. Justifier.

P : « Le carré d'un nombre positif ou nul est toujours supérieur ou égal à ce nombre ».

8 Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse. Justifier.

A : « Si $x \geq -1$, alors $x^2 \geq 1$ ».
B : « Si $x < -1$, alors $-1 < \frac{1}{x} < 0$ ».

9 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction inverse.
Déterminer les axes de symétries de $\mathcal{C}$. Aucune justification n'est demandée.

10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2$ et la droite *D* d'équation $y = 2x$ (on prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.
Le but de l'exercice est d'étudier la **position relative*** de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite *D* c'est-à-dire que l'on cherche à savoir sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*, sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}$ est au-dessous de *D* et en quel(s) point(s) $\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes.

1°) Etude graphique

Etudier graphiquement la position relative de $\mathcal{C}$ et *D*.

On rédigera sur le modèle suivant :

Si $x \in$........., alors $\mathcal{C}$ est …………. de *D*.
Si $x \in$........., alors $\mathcal{C}$ est …………. de *D*.
$\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes aux points d'abscisses ……. .

2°) Etude algébrique

Etudier le signe de la différence $x^2 - 2x = x\left(x - 2\right)$ au moyen d'un tableau de signes et retrouver les résultats du 1°).
* L'expression *position relative* a plusieurs sens en géométrie plane : pour des droites, il s'agit de savoir si elles sont sécantes ou parallèles ; pour une droite et un cercle, il s'agit de savoir s'ils sont sans points communs, s'ils ont un point commun (on dit que le cercle et la droite sont tangents), s'ils ont deux points communs (on dit que le cercle et la droite sont sécants) ; pour deux cercles, il s'agit également de déterminer leur intersection (il y a plusieurs cas possibles : intérieurs, extérieurs, tangents intérieurement, tangents extérieurement).
Dans le plan muni d'un repère, le sens est un peu différent pour une courbe et une droite ou pour deux courbes.

11 On considère la fonction *f* définie par $\begin{cases} f\left(x\right) = x + 1 \text{ si } x < 2 \\ f\left(x\right) = -\frac{1}{2}x + 5 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$.
Il s'agit d'une seule fonction définie par deux expressions différentes suivant que $x < 2$ ou $x \geq 2$.

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (prendre le centimètre pour unité de longueur), tracer au crayon les droites *D* et *D'* d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Faire un tableau de valeurs pour chacune des deux droites (deux valeurs de *x* et les valeurs de *y* correspondantes).

2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* sur le graphique précédent. On marquera précisément les points d'arrêt.

12 Tracer, sans explication, la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction valeur absolue dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **en prenant le centimètre pour unité de longueur**.
Résoudre graphiquement
• l'équation : $\left| x \right| = 2$ (1)
• les inéquations : $\left| x \right| \leq 3$ (2) et $\left| x \right| > 1$ (3)
On notera S_1, S_2, S_3 les ensembles de solutions respectifs.

13 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = x^2$ pour $x < 1$ et $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$ pour $x \geq 1$.
La fonction *f* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par deux expressions différentes sur les intervalles $\left]-\infty\,; 1\right[$ et $\left[1\,; +\infty\right[$.
Il s'agit bien d'une seule fonction définie par deux expressions différentes.

Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Aucune explication ni de tableau de valeurs n'est demandé.

14 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=|x-3|$.

1°) Exprimer $f(x)$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de *x*.

2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant le centimètre pour unité de longueur.

15 Développer $(2x+1)^3$ et $(x-3)^3$.

16 Factoriser x^3-1 et $8x^3+1$.

17 Mettre x^6-1 sous la forme d'un produit de quatre facteurs.

18 Développer et réduire l'expression $\text{A}=(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2$.

19 Soit *a* et *b* deux réels non nuls. Démontrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2=\dfrac{(a-b)^2}{ab}$.

Réponses

10 Positions relatives d'une courbe et d'une droite

1°)

Si $x\in\left]0\,;2\right[$, alors $\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*.
Si $x\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$, alors $\mathcal{C}$ est au-dessous de *D*.
$\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes au point d'abscisses 0 et 2.

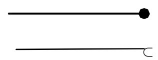
2°)

$x=0$ | $x-2=0$
$x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
SGN de x		–	0	+		+	
SGN de $x-2$		–		–	0	+	
SGN de $x(x-2)$		+	0	–	0	+	
Position de $\mathcal{C}$ par rapport à *D*		$\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*	$\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes au point d'absc. 0	$\mathcal{C}$ est au-dessous de *D*	$\mathcal{C}$ et *D* sont sécantes au point d'absc. 2	$\mathcal{C}$ est au-dessus de *D*	

11 1°) Ne pas prendre trois valeurs de *x* pour les tracés de droites. Deux valeurs suffisent !

2°) Les points d'arrêt sont A(2 ; 3) et B(2 ; 4).
Mettre les pointillés avec les coordonnées du point A puis les pointillés avec les coordonnées du point B.
Le point A est exclu ; le point B est compris.



La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites.
L'une est une demi-droite d'origine A privée du point A (on parle de « demi-droite ouverte ») ; l'autre est une demi-droite d'origine B (on parle de demi-droite fermée).

La courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites.

12 L'équation (1) s'écrit $f(x)=2$ donc $S_1=\{2\,;-2\}$.
L'inéquation (2) s'écrit $f(x)\leq 3$ donc $S_2=[-3\,;3]$.
L'inéquation (3) s'écrit $f(x)>1$ donc $S_3=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.

14 1°) Si $x\geq 3$, alors $x-3\geq 0$ donc $f(x)=x-3$.

Si $x\leq 3$, alors $x-3\leq 0$ donc $f(x)=\left|\underbrace{x-3}_{<0}\right|=-(x-3)=-x+3$.

2°) On trace les droites *D* et *D'* d'équations respectives $y=x-3$ et $y=-x+3$.

15 On utilise les identités remarquables cubiques
$(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$; $(x-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$.

16 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; $8x^3+1=(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

17 $x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

18 $\text{A}=3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2bc-2ac$.

N.B. : On peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier le résultat.

1°) Illustrer l'identité remarquable $(a+b)^2$ à l'aide des aires (on suppose que $a>0$ et $b>0$).

2°) Illustrer l'identité remarquable $(a-b)^2$ à l'aide des aires (on suppose que $0<b<a$).