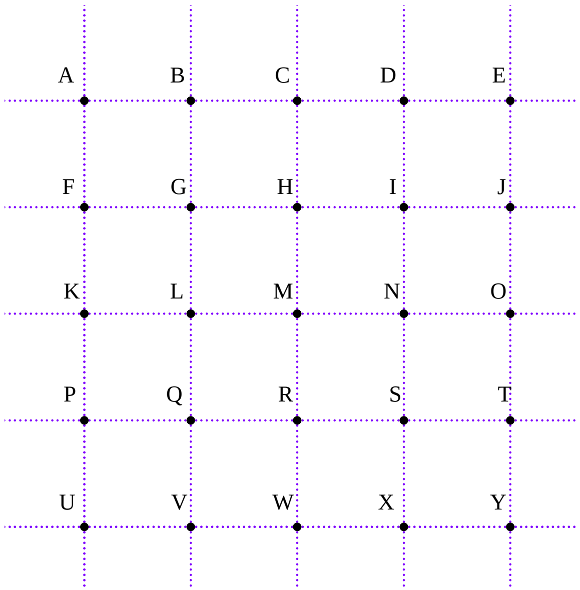
1ère S

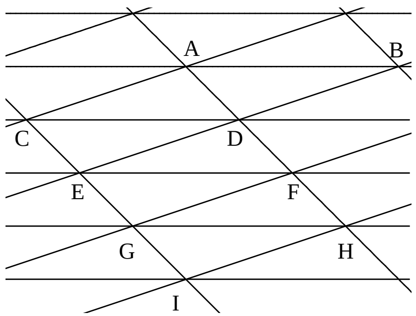
Exercices sur les vecteurs du plan

1 En observant la figure ci-dessous constituée d'un quadrillage régulier, compléter les phrases ci-dessous :

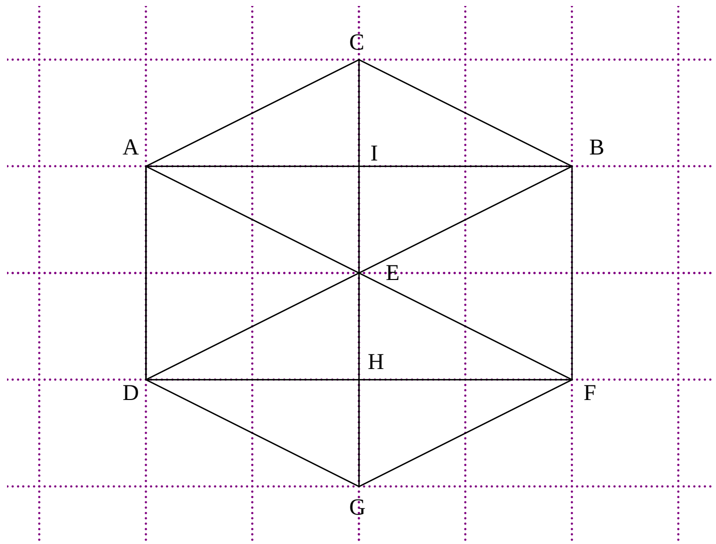
a. Par la translation qui transforme A en D, L a pour image …. .
b. Par la translation qui transforme C en L, …. a pour image M.
c. Par la translation qui transforme F en …. , C a pour image T.
d. Par la translation qui transforme A en H, H a pour image …. .
e. Par la translation qui transforme B en V, …. a pour image X.
f. Par la translation qui transforme …. en R, H a pour image T.
g. Par la translation qui transforme I en A, S a pour image …. .
h. Par la translation qui transforme D en B, M a pour image …. .



2 Déterminer l'image de chacun des points A et E par la translation de vecteur :
a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{GI}$
c) $\overrightarrow{DH}$



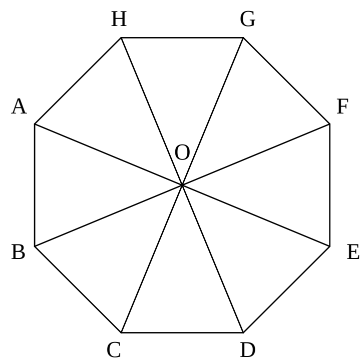
3 On considère l'hexagone ACBFGD représenté sur la figure ci-dessous.



Compléter le tableau suivant :

L'image de…	par la translation de vecteur…	est le point…
A	$\overrightarrow{DE}$	
	$\overrightarrow{GH}$	C
H		F
B		C

4 Soit ABCDEFGH un octogone régulier de centre O.



Compléter le tableau ci-dessous :

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même norme				

5 Soit ABCD et BFEC deux parallélogrammes ayant le côté [BC] en commun.
Démontrer en utilisant les vecteurs que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

6 En utilisant la relation de Chasles, recopier et compléter les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\bullet}$	b. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\bullet A}+\overrightarrow{A\bullet}$	c. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\bullet P}+\overrightarrow{\bullet\bullet}$	d. $\overrightarrow{\bullet E}=\overrightarrow{F\bullet}+\overrightarrow{G\bullet}$
e. $\overrightarrow{H\bullet}=\overrightarrow{\bullet\bullet}+\overrightarrow{IJ}$	f. $\overrightarrow{\bullet\bullet}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\bullet M}$	g. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\bullet\bullet}$	h. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\bullet C}+\overrightarrow{\bullet D}+\overrightarrow{\bullet\bullet}$

7 Soit A, B, C, D et E cinq points quelconques.
Démontrer que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

8 Soit ABCD un parallélogramme.
Démontrer que :
a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ c) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

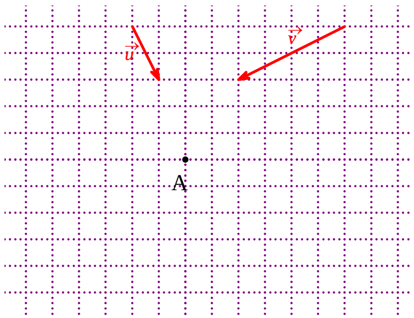
9 Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
Ecrire plus simplement : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

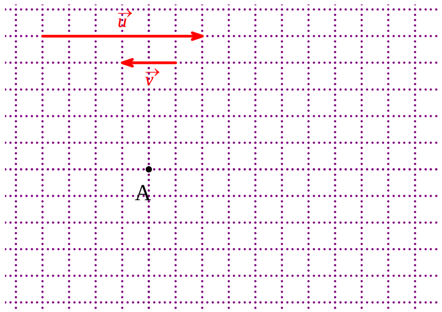
10 Ecrire le plus simplement possible les vecteurs :

1°) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ $\vec{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}$

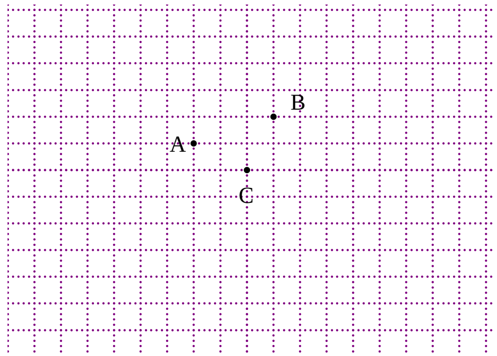
2°) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ $\vec{v}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{NP}$ $\vec{w}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EQ}-\overrightarrow{EP}$

11 Reproduire chacune des figures données et construire les points M et N définis par les égalités :
$\overrightarrow{AM}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{AN}=\vec{u}-\vec{v}$.

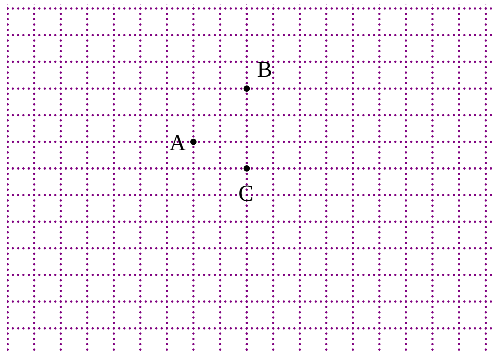




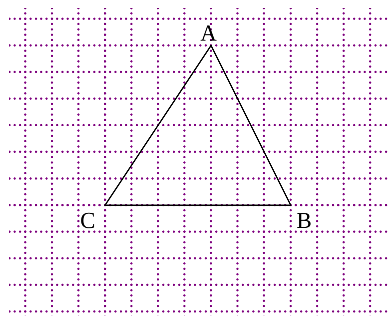
12 Reproduire la figure donnée ci-dessous et construire les points M et N définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$.



13 Reproduire la figure donnée ci-dessous et construire les points M et N définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

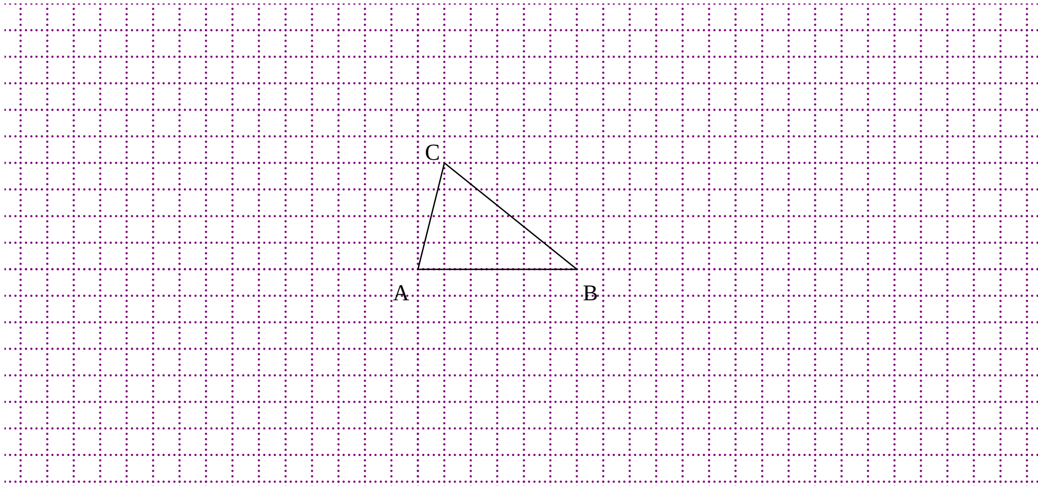


14 Soit ABC un triangle.
Reproduire la figure ci-dessous et construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



15 Soit ABC un triangle.

Reproduire la figure ci-dessous et construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.



16 Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{NC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Pour la figure, on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B et C « au-dessus » de (AB).
2°) Démontrer que C est le milieu du segment [MN].

17 Soit ABC un triangle quelconque.
On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [BA].
Faire une figure codée.
Calculer la somme vectorielle $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

18 Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan.
On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].
Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

19 Soit A et B deux points distincts du plan. On note M le point défini par $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (1).
1°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
Indication : remplacer $\overrightarrow{MB}$ par $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$ dans l'égalité (1).
2°) Construire M.

20 Soit ABC un triangle quelconque.

1°) Construire les points E et F définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2°) Démontrer que (EF) et (BC) sont parallèles.

21 Soit ABC un triangle quelconque.

On note M et N les points définis par les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles en utilisant les vecteurs.

22 Soit ABC un triangle quelconque.

On considère les points I, J, K définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Faire une figure.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (il s'agit d'obtenir une égalité de la forme $\overrightarrow{IJ} = \ldots\ \overrightarrow{AB} + \ldots\ \overrightarrow{AC}$).
2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que les points I, J, K sont alignés.

23 Soit ABCD un parallélogramme.
On considère les points I, J, K, L définis par les égalités vectorielles :
$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (1), $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ (2), $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ (3), $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ (4).
Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle $\widehat{BAD}$ aigu).
Ecrire les hypothèses.

Démontrer que IJKL est un parallélogramme.

24 Soit ABCD un parallélogramme.

On note M et N les points définis par les égalités : $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que les droites (AM) et (DN) sont parallèles.

Corrigé des exercices

1 **Parallélogramme et translation** (exercice de base)
Connaissances nécessaires : translation.

a. O	b. D	c. W	d. O	e. D	f. F	g. K	h. K

a. Par la translation qui transforme A en D, L a pour image O.
b. Par la translation qui transforme C en L, D a pour image M.
c. Par la translation qui transforme F en W, C a pour image T.
d. Par la translation qui transforme A en H, H a pour image O.
e. Par la translation qui transforme B en V, D a pour image X.
f. Par la translation qui transforme F en R, H a pour image T.
g. Par la translation qui transforme I en A, S a pour image K.
h. Par la translation qui transforme D en B, M a pour image K.

2 **Images de points par une translation**

a) L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est B.
L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$ est D.
L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$ est F.

b) L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est F.
L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{GI}$ est G.
L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$ est I.

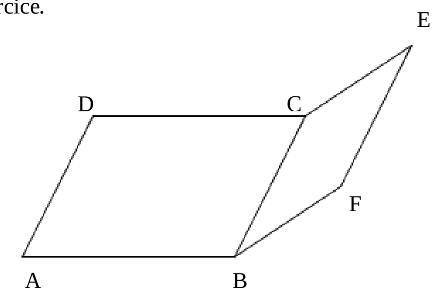
3 Tableau :

L'image de…	par la translation de vecteur…	est le point…
A	$\overrightarrow{DE}$	C
I	$\overrightarrow{GH}$	C
H	$\overrightarrow{IB}$	F
B	$\overrightarrow{FE}$	C

4 Cet exercice a pour but de revoir les 3 caractéristiques d'un vecteur défini par 2 points distincts. Il importe de ne pas confondre « sens » et « direction » d'un vecteur.

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction		×	×	×
ont le même sens		×	×	
ont la même norme	×		×	×

5 On commence par faire une figure.
On écrit les hypothèses de l'exercice.



Démontrons que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
BFEC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.
On a donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$.
Plus particulièrement, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FE}$.
On en déduit que le quadrilatère AFED est un parallélogramme.

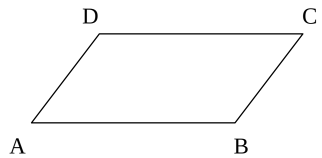
6 **Utilisation de la relation de Chasles**

a. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}$	b. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$	c. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$	d. $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
e. $\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}$	f. $\overrightarrow{JM}=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{KM}$	g. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$	h. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$

7 A, B, C, D, E sont cinq points quelconques.
Démontrons que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\\&=\overrightarrow{AA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

8 ABCD parallélogramme



a) Démontrons que $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}&=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\\&=\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

b) Démontrons que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

c) Démontrons que $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

9 A, B, C, D points quelconques du plan.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Simplifions $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AA}\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

10 Simplifications de vecteurs

1°)

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\\\vec{u}&=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\\vec{v}&=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\\\vec{v}&=\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}\\\vec{w}&=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FA}\\\vec{w}&=\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{FA}\\\vec{w}&=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FA}\\\vec{w}&=2\overrightarrow{FA}\end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\\\vec{u}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\\vec{u}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\\\vec{u}&=\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{NP}\\\vec{v}&=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}\\\vec{v}&=\vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EQ}-\overrightarrow{EP}\\\vec{w}&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{PE}\\\vec{w}&=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{PE}\\\vec{w}&=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}\\\vec{w}&=\vec{0}\end{aligned}$$

11 Constructions de points

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\vec{u}+\vec{v}\\\overrightarrow{AN}&=\vec{u}-\vec{v}\end{aligned}$$

Figure de gauche :

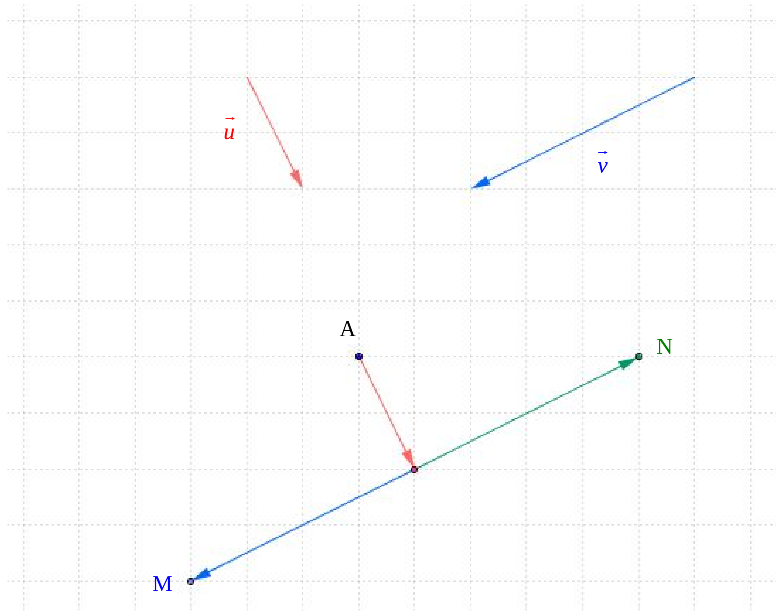
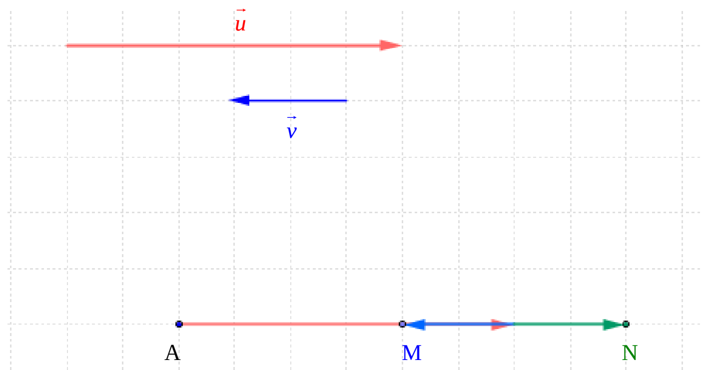
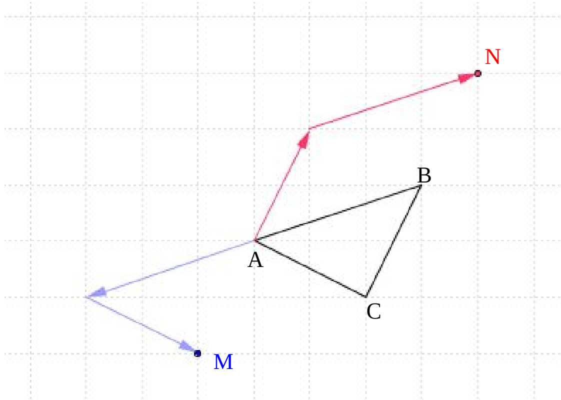


Figure de droite :



12 **Constructions de points**

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$

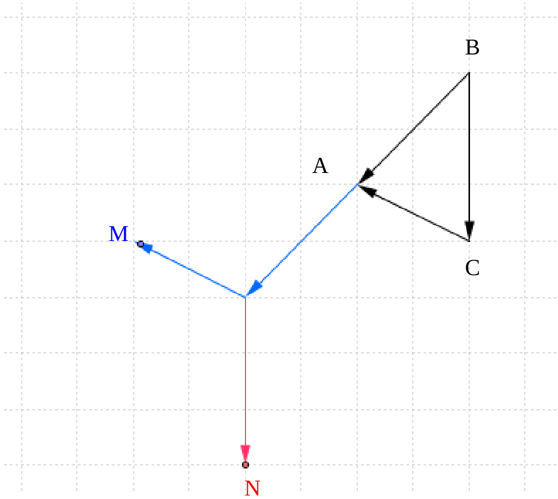


On peut remarquer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles.

13 **Constructions de points**

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

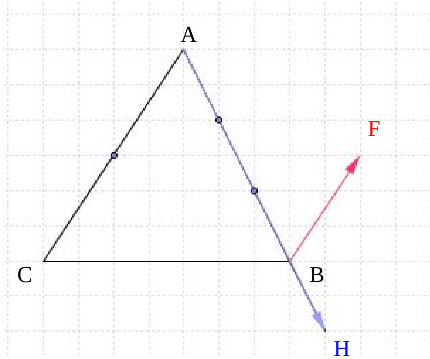
$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ soit $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$



14 **Construction de points**

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

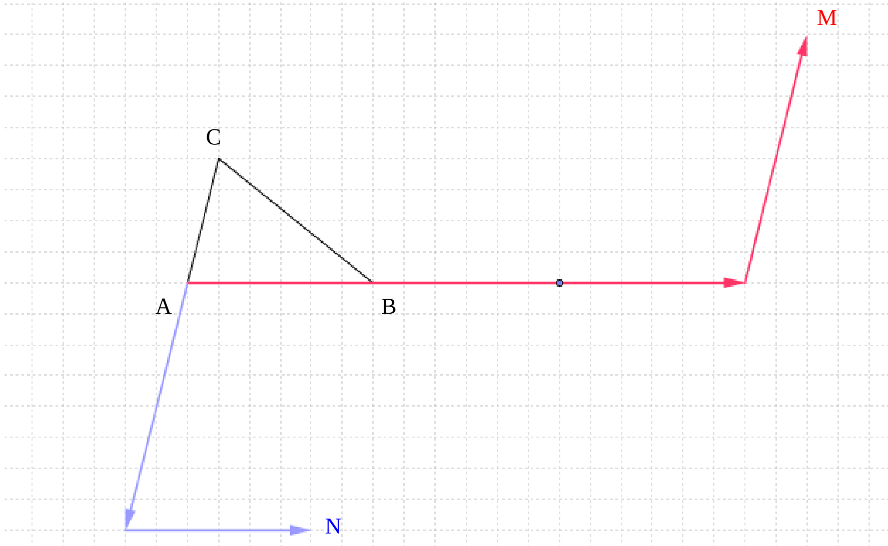
$\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



15 **Constructions de points**

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

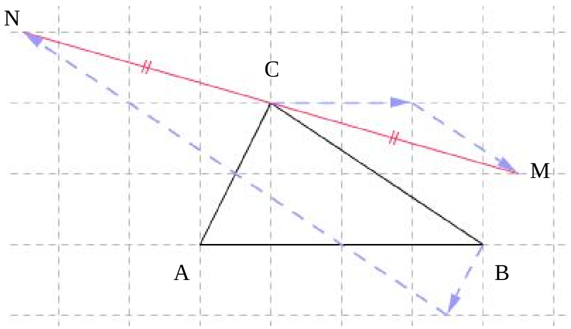


16 ABC : triangle quelconque

$$\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{NC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1°) $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

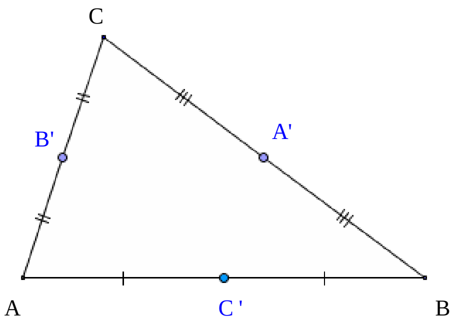


2°) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}\right)+\overrightarrow{CN}$ (relation de Chasles)

$$\begin{aligned}
&=\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\
&=\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&=\underbrace{-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\Big)\\
&=\vec{0}
\end{aligned}$$

On en déduit que C est le milieu du segment [MN].

17 **Figure**



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}.\\
&=\underbrace{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}+\overrightarrow{AC'}\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\Big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}}$

18 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$ (1) (relation de Chasles avec deux points : I et J)

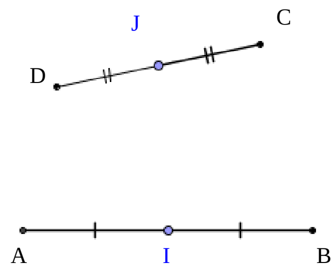
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ (2)

On ajoute les égalités (1) et (2) membre à membre.

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\Big(\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}}_{\vec{0}}\Big)+2\overrightarrow{IJ}+\Big(\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}\Big)$$

car I milieu de [AB] car J milieu de [CD]

On obtient donc : $\boxed{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}}$.



19 M : point défini par $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (1).

1°) Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

(1) donne $2\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ (relation de Chasles)

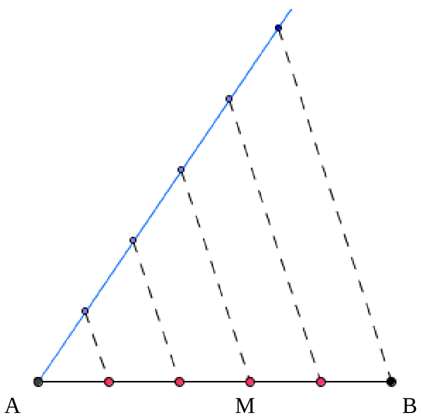
$$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{MA}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

2°) Construction de M.

Sur quadrillage

Sur papier blanc

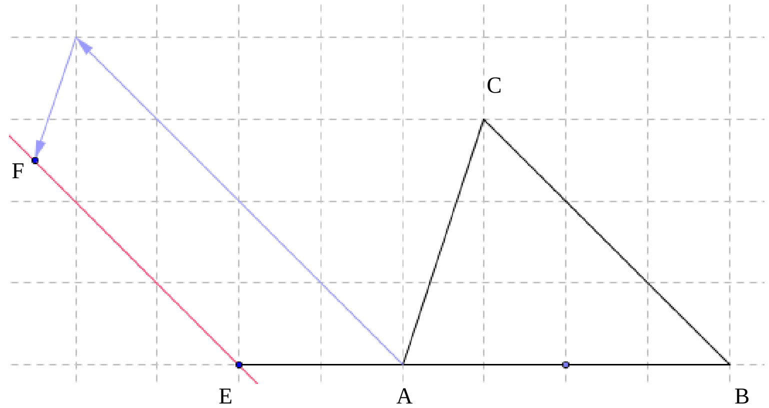
Utilisation d'une demi-droite auxiliaire d'origine A.
On reporte 5 fois la même longueur sur cette demi-droite (à l'aide d'un écartement de compas ou à l'aide du quadrillage). On obtient une division régulière de cette demi-droite.
On joint le dernier point marqué à B.
On trace les parallèles à cette droite.
On obtient ainsi une division régulière du segment [AB] en cinq segments de même longueur.



20 **Parallélisme de droites**

ABC : triangle quelconque

1°) $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2°) Démontrons que (EF) et (BC) sont parallèles.

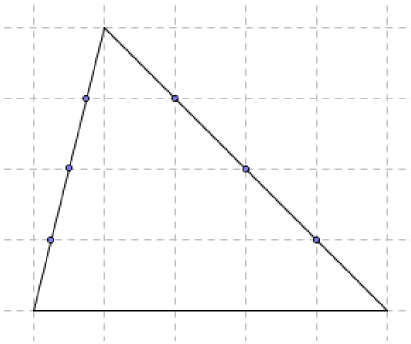
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

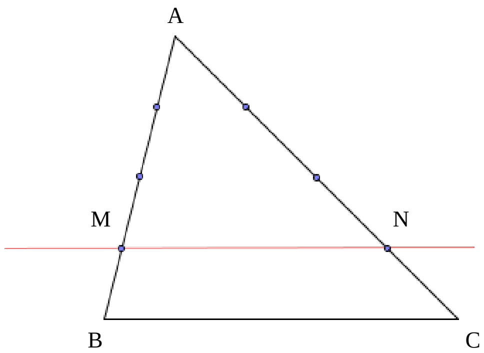
Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Par conséquent, (EF) // (BC).

21 **Parallélisme de droites**

ABC un triangle quelconque

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$



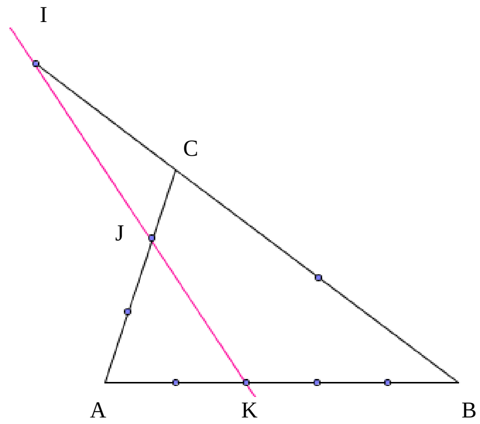


Démontrons que (MN) / / (BC).

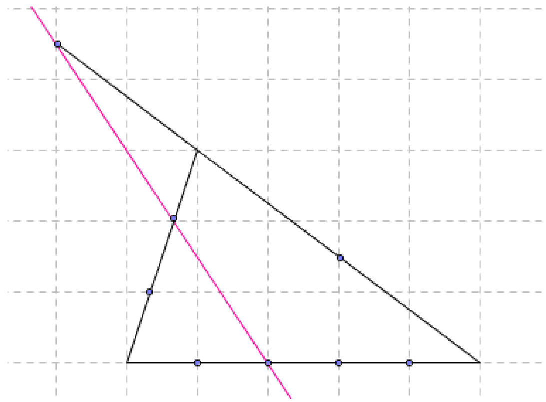
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \qquad \text{(relation de Chasles)}$$
$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Par conséquent, (MN) // (BC).

22 Alignement de points



Utilisation du quadrillage pour faire la figure :



1°) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$ (relation de Chasles avec deux points : B et C)

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$
$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$\boxed{\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}}$$

2°) On écrit : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\\&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\&=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\&=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{IK}=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

3°) **Démontrons que les points I, J, K sont alignés.**

Méthode pour trouver au brouillon :

On écrit les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{IJ}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$
$\overrightarrow{IK}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{2}$

On vérifie que c'est un tableau de proportionnalité en calculant les quotients.

$$\frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{10}\times 2=\frac{9}{5}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{9}{5}$$

On en déduit que $\overrightarrow{IK}=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Méthode au propre :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK}&=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

On a donc $\overrightarrow{IK}=\frac{9}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Par suite les vecteurs, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points I, J, K sont alignés.