1ère S

Exercices sur la valeur absolue (1)

1 Calculer la distance entre les nombres :

a) – 1 et – 5 b) 8 et – 1 c) $\frac{1}{3}$ et $-\frac{10}{3}$ d) $\sqrt{8}$ et $\sqrt{2}$

2 Ecrire les réels suivants sans utiliser de barres de valeur absolue :

$|3|$ = ….. ; $|-2|$ = ….. ; $|-3{,}1|$ = ….. ; $\left|-\frac{2}{5}\right|$ = ….. ; $|-\pi|$ = ….. ; $\left|(-5)^2\right|$ = ….. ; $\left|10^{-3}\right|$ = …. ;

$\left|-10^5\right|$ = …. ; $-\left|-\frac{4}{5}\right|$ = ….. .

3 Calculer :

$A=\left|-2-\frac{1}{2}\right|$; $B=|3-8|$; $C=2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1$; $D=\left|1-\frac{4}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes à l'aide de la droite réelle :

$|x|=\frac{5}{2}$ (1) ; $|x|=-1$ (2) ; $|x|=0$ (3).

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide de la droite réelle :

$|x|\le 4$ (1) ; $|x|>\frac{8}{3}$ (2) ; $|x|\ge 3$ (3).

6 Soit x un réel strictement positif quelconque.

1°) Ranger dans l'ordre croissant les nombres : 1, $\frac{x}{x+1}$, $\frac{x+1}{x}$.

2°) Lequel des réels $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{x+1}{x}$ est le plus proche de 1 ?

7 On considère l'expression $A=|x+2y|-|x-y|$.

Calculer A pour :

a) $x = 4$; $y = -1$;

b) $x=\sqrt{5}$; $y=2\sqrt{5}$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|x|\le -2$ (1) ; $|x|>-1$ (2) ; $|x|\le 0$ (3).

9 Résoudre le système $\begin{cases}3|x|-2|y|=-5\\5|x|+|y|=9\end{cases}$.

Indication : effectuer le changement d'inconnue $X=|x|$ et $Y=|y|$.

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ par le calcul les équations suivantes :

$|x+5|=1$ (1) ; $|3x-2|=4$ (2) ; $|x+2|=-5$ (3) ; $\left|x^2-3\right|=1$ (4) ; $|1-x|=\sqrt{2}$ (5).

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ par le calcul les inéquations suivantes :

$|x+7|<9$ (1) ; $|2x-1|\ge 3$ (2) ; $|3x|\ge 2$ (3) ; $|2x-1|<\frac{1}{2}$ (4) ; $|1-4x|<-1$ (5).

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations :

(I) $\begin{cases}|2x-3|\le 1\\|x+1|>5\end{cases}$ (II) $\begin{cases}|x-2|<9\\|x+1|\ge 4\end{cases}$ (III) $\begin{cases}|x-1|<8\\|x-2|\ge 4\end{cases}$

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $|2x-1|=|x+4|$ (1) ; $|3-x|=|x|$ (2)

Corrigé des exercices

1 Calcul de la distance entre deux nombres

• On applique la définition de la distance de deux réels : la distance de deux réels est la différence entre le plus grand et le plus petit.

• On utilise la notation d(x ; y) pour désigner la distance entre deux réels x et y.

a) – 1 et – 5

$-5 < -1$ donc

$$\begin{aligned}d(-1\,;-5) &= -1-(-5)\\ &= -1+5\\ &= 4\end{aligned}$$

b) 8 et – 1

$8 > -1$ donc

$$\begin{aligned}d(8\,;-1) &= 8-(-1)\\ &= 8+1\\ &= 9\end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{1}{3} > -\dfrac{10}{3}$ donc

$$\begin{aligned}d\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{10}{3}\right) &= \frac{1}{3}-\left(-\frac{10}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{11}{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{8}$ et $\sqrt{2}$

$\sqrt{8} > \sqrt{2}$ donc

$$\begin{aligned}d\left(\sqrt{8}\,;\sqrt{2}\right) &= \sqrt{8}-\sqrt{2}\\ &= 2\sqrt{2}-\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

2 Valeurs absolues de nombres

$|\,3\,| = 3$; $|-2\,| = 2$; $|-3{,}1\,| = 3{,}1$; $\left|-\dfrac{2}{5}\right| = \dfrac{2}{5}$; $|-\pi\,| = \pi$; $\left|(-5)^2\right| = 25$; $\left|10^{-3}\right| = 10^{-3}$; $\left|-10^5\right| = 10^5$;

$-\left|-\dfrac{4}{5}\right| = -\dfrac{4}{5}$

3 Calculs d'expressions comportant des valeurs

$$\begin{aligned}A &= \left|-2-\frac{1}{2}\right|\\ &= \left|-\frac{5}{2}\right|\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= |\,3-8\,|\\ &= |-5\,|\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= 2\left|3-\frac{1}{2}\right|-1\\ &= 2\left|\frac{5}{2}\right|-1\\ &= \cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}-1\\ &= 5-1\\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= \left|1-\frac{4}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|2-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}\right|\\ &= \left|-\frac{1}{3}\right|-\frac{11}{2}\times\left|\frac{24-4-21}{12}\right|\\ &= \frac{1}{3}-\frac{11}{2}\times\left|-\frac{1}{12}\right|\\ &= \frac{1}{3}-\frac{11}{2}\times\frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{3}-\frac{11}{24}\\ &= \frac{8-11}{24}\\ &= -\frac{3}{24}\\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

4 Résolutions d'équations avec des valeurs absolues

• $|\,x\,| = \dfrac{5}{2}$ (1)

(1) signifie que la distance entre 0 et x est égale à $\dfrac{5}{2}$.

$$d(0\,;x) = \frac{5}{2}$$

On trace un axe représentant la droite réelle.
On place 0.
On trace deux flèches à partir de 0 représentant la longueur $\dfrac{5}{2}$.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \left\{-\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right\}$.

• $|\,x\,| = -1$ (2)

L'équation (2) n'a pas de solution car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \varnothing$.

• $|\,x\,| = 0$ (3)

(3) signifie que la distance entre 0 et x est égale à 0.

$$d(0\,;x) = 0$$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \{\,0\,\}$.

5 Résolutions d'inéquations avec des valeurs absolues

• $|\,x\,| \leq 4$ (1)

(1) signifie que la distance entre 0 et x est inférieure ou égale à 4.

On trace un axe représentant la droite réelle.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_2 = [-4\,;4]$.

• $|\,x\,| > \dfrac{8}{3}$ (2)

(2) signifie que la distance entre 0 et x est strictement supérieure à $\dfrac{8}{3}$.

On trace un axe représentant la droite réelle.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \left]-\infty\,;-\dfrac{8}{3}\right[\cup\left]\dfrac{8}{3}\,;+\infty\right[$.

• $|\,x\,|\geq 3$ (3).

(3) signifie que la distance entre 0 et x est supérieure ou égale à 3.

On trace un axe représentant la droite réelle.

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-3]\cup[3\,;+\infty[$.

$\boxed{6}$ $x > 0$

1°) Rangeons dans l'ordre croissant les nombres : 1, $\dfrac{x}{x+1}$, $\dfrac{x+1}{x}$.

$x > 0$ donc $x + 1 > 0$.
$\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x}$ sont donc deux quotients dont le numérateur et le dénominateur sont positifs.

Or $x < x + 1$ donc $\dfrac{x}{x+1} < 1$ et $\dfrac{x+1}{x} > 1$ (cf. rappel de règle)

Conclusion : $\dfrac{x}{x+1} < 1 < \dfrac{x+1}{x}$

Règle :

Pour un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont positifs :
- si le numérateur est strictement inférieur au dénominateur, alors ce quotient est strictement inférieur à 1 ;
- si le numérateur est strictement supérieur au dénominateur, alors ce quotient est strictement supérieur à 1.

On peut aussi redémontrer la règle dans le cas qui nous intéresse ici.
On écrit $x < x + 1$.
Donc :
- en divisant les deux membres par x ($x > 0$), on obtient $1 < \dfrac{x+1}{x}$.
- en divisant les deux membres par $x + 1$ ($x + 1 > 0$), on obtient $\dfrac{x+1}{x} < 1$.

2°) Déterminons lequel des réels $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x}$ est le plus proche de 1.

Pour répondre à la question, on calcule la distance entre $\dfrac{x}{x+1}$ et 1 puis entre $\dfrac{x+1}{x}$ et 1.
On ne peut répondre en prenant pour x une valeur particulière.

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{x+1};1\right)=1-\frac{x}{x+1}=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$
$$\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{x};1\right)=\frac{x+1}{x}-1=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x}=\frac{1}{x}$$

Or $0 < x < x + 1$ donc comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a

$\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x+1}$

Par conséquent, $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{x+1};1\right) < \mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{x};1\right)$.

Le réel $\dfrac{x}{x+1}$ est donc plus proche de 1 que $\dfrac{x+1}{x}$.

Illustration graphique :

On peut tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$
(en utilisant la calculatrice ou, mieux, un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur).
On trace également la droite d'équation $y = 1$.

On observe alors la position relative des deux courbes et de la droite sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ uniquement (puisque $x > 0$ par hypothèse) c'est-à-dire que l'on observe comment les courbes se positionnent les unes par rapport aux autres (au-dessus ou au-dessous).

On peut alors visualiser l'inégalité $\dfrac{x}{x+1} < 1 < \dfrac{x+1}{x}$ établie à la question 1°) ainsi que la réponse à la question 2°).

$\boxed{7}$ $A = |\,x+2y\,|-|\,x-y\,|$

• **Calcul de A pour $x = 4$ et $y = -1$**

$A = |\,4+2\times(-1)\,|-|\,4-(-1)\,|$
$A = |\,4-2\,|-|\,5\,|$
$A = 2-5$
$A = -3$

• **Calcul de A pour $x = \sqrt{5}$ et $y = 2\sqrt{5}$**

$A = |\,\sqrt{5}+2\times 2\sqrt{5}\,|-|\,\sqrt{5}-2\sqrt{5}\,|$
$A = |\,5\sqrt{5}\,|-|\,-\sqrt{5}\,|$
$A = 5\sqrt{5}-\sqrt{5}$
$A = 4\sqrt{5}$

$\boxed{8}$ **Résolution d'inéquations avec valeurs absolues**

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x\,|\leq -2$ (1).

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \varnothing$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|\,x\,| > -1$ (2).
Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (2) admet tous les réels pour solutions.

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \mathbb{R}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x| \leq 0$ (3).

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul donc (3) admet uniquement 0 pour solution.

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \{0\}$.

9 Résolution d'un système avec des valeurs absolues

Résolvons le système (I) $\begin{cases} 3|x| - 2|y| = -5 \\ 5|x| + |y| = 9 \end{cases}$.

On pose $X = |x|$ et $Y = |y|$ (changement d'inconnues).

Le système (I) s'écrit alors (II) $\begin{cases} 3X - 2Y = -5 \\ 5X + Y = 9 \end{cases}$.

Le système (II) est un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
On calcule le déterminant.

$3 \times 1 - 5 \times (-2) = 3 + 10 = 13 \neq 0$.
Le déterminant est non nul donc le système (II) admet un unique couple solution.

Pour trouver ce couple, on peut utiliser la méthode par combinaison ou par substitution.

Résolvons le système (II) par combinaisons.

Pour trouver X :

On garde la 1ère équation et on multiplie la 2e équation par 2 (pour éliminer les Y).

$$\begin{cases} 3X - 2Y = -5 \\ 10X + 2Y = 18 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations.

$13X = 13$
$X = 1$

Pour trouver Y :

On multiplie la 1ère équation par – 5 et la 2e équation par 3 (pour éliminer les X).

$$\begin{cases} -15X + 10Y = 25 \\ 15X + 3Y = 27 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre les deux équations.

$13Y = 52$
$Y = 4$

La solution de (II) est le couple (1 ; 4).

On revient au système (I).

On sait que $X = |x|$ et $Y = |y|$.

Donc le système (I) est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} |x| = 1 \\ |y| = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 4 \text{ ou } y = -4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (I) est donc $S = \{(1;4);(1;-4);(-1;4);(-1;-4)\}$.

Le système (I) admet 4 couples solutions.

10 Résolutions d'équations avec valeurs absolues

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+5| = 1$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$x + 5 = 1$ ou $x + 5 = -1$
$x = -4$ ou $x = -6$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{-4 ; -6\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|3x-2| = 4$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$3x - 2 = 4$ ou $3x - 2 = -4$
$3x = 6$ ou $3x = -2$
$x = 2$ ou $x = -\frac{2}{3}$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = \left\{2 ; -\frac{2}{3}\right\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+2| = -5$ (3)

Le résultat d'une valeur absolue est positif ou nul.
Donc l'ensemble des solutions de (3) est $S_3 = \varnothing$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left| x^2-3 \right|=1$ (4).

(4) est successivement équivalente à :

$x^2-3=1$ ou $x^2-3=-1$
$x^2=4$ ou $x^2=2$
$x=2$ ou $x=-2$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left\{2\,;-2\,;\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right\}$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left| 1-x \right|=\sqrt{2}$ (5).

(5) est successivement équivalente à :

$1-x=\sqrt{2}$ ou $1-x=-\sqrt{2}$
$x=1-\sqrt{2}$ ou $x=1+\sqrt{2}$
L'ensemble des solutions de (5) est $S_5=\left\{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right\}$.

$\boxed{11}$ Résolutions d'équations avec valeurs absolues

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left| x+7 \right|<9$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$-9<x+7<9$
$-16<x<2$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-16\,;2[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left| 2x-1 \right|\geq 3$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$2x-1\leq -3$ ou $2x-1\geq 3$ *
$2x\leq -2$ ou $2x\geq 4$
$x\leq -1$ ou $x\geq 2$

L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=]-\infty\,;-1]\cup[2\,;+\infty[$.

* **Explication complémentaire :**

$| \ldots | \geqslant 3$ signifie $\ldots \leqslant -3$ ou $\ldots \geqslant 3$

En effet, $| X | \geqslant 3$ signifie $d(0, X) \geqslant 3$
Image mentale associée :
Tout ce qui est avant -3
Tout ce qui est après 3.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left| 3x \right|\geq 2$ (3).

(3) est successivement équivalente à :

$3x\leq -2$ ou $3x\geq 2$
$x\leq -\frac{2}{3}$ ou $x\geq \frac{2}{3}$

L'ensemble des solutions de (3) est $S_3=\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left| 2x-1 \right|<\frac{1}{2}$ (4).

(4) est successivement équivalente à :

$-\frac{1}{2}<2x-1<\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}<2x<\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$

L'ensemble des solutions de (4) est $S_4=\left]\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}\right[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left| 1-4x \right|<-1$ (5).

L'ensemble des solutions de (5) est $S_5=\varnothing$.

$\boxed{12}$ Résolutions de systèmes d'inéquations avec valeurs absolues

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (I) $\begin{cases} \left| 2x-3 \right|\leq 1 & (1) \\ \left| x+1 \right|>5 & (2) \end{cases}$.

Méthode : on résout séparément (1) et (2).

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = [1\,;2]$.
L'ensemble des solutions de (2) est $S_2=]-\infty\,;-6[\cup]4\,;+\infty[$.

On représente les ensembles S_1 et S_2 sur la droite réelle.

L'ensemble des solutions du système (I) est $S=S_1\cap S_2=\varnothing$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (II) $\begin{cases} |x-2|<9 & (1) \\ |x+1| \geq 4 & (2) \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-7\ ;11[$.
L'ensemble des solutions de (2) est $S_3 = \left]-\infty\ ;-5\right] \cup \left[3\ ;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions du système (II) est $S = S_1 \cap S_2 = \left]-7\ ;-5\right] \cup \left[3\ ;11\right[$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système (III) $\begin{cases} |x-1|<8 & (1) \\ |x-2| \geq 4 & (2) \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 =]-7\ ;9[$.
L'ensemble des solutions de (2) est $S_3 = \left]-\infty\ ;-2\right] \cup \left[6\ ;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions du système (III) est $S = S_1 \cap S_2 = \left]-7\ ;-2\right] \cup \left[6\ ;9\right[$.

Retour sur les notions d'intersection et de réunion

Ces notions ont été vues en seconde avec les probabilités.

1 Retour sur réunion et intersection

Exemples sur la droite réelle

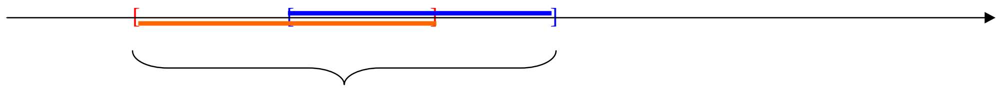
a) Intersection

L'intersection est constituée des éléments communs aux deux.

« L'intersection c'est ce qu'il y a en commun ».

Intersection : rouge et bleu.

b) Réunion



La réunion est constituée des éléments qui appartiennent soit à l'un soit à l'autre, soit aux deux à la fois.

« La réunion c'est la somme des deux. »

Réunion : rouge ou bleu ou les deux.

2 Notations

Réunion : $\cup$ (U de Union)
Intersection : $\cap$ (U à l'envers)

Je ne mets pas d'exemple.