TS

Dérivation des fonctions

I. Dérivabilité en un réel

1°) Définition (fonction dérivable en un réel ; nombre dérivé)

I est un intervalle (non vide et non réduit à un singleton).
f est une fonction définie sur I.
a est un réel fixé dans I.

On dit que f est **dérivable en a** lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{I}}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un réel (fini).

Cette limite est appelée **le nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$ (notation de Lagrange).

2°) Remarques

- Le résultat de la limite est fini.
  Si le résultat de la limite est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a.

- La définition sert surtout à étudier la dérivabilité en un réel particulier et à démontrer des théorèmes.

3°) Autre écriture du nombre dérivé

$$f'(a) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{I}}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\[2ex] \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{cases}$$

Passage de l'une à l'autre

$x = a+h \iff h = x-a$
$h \to 0 \iff x \to a$

4°) Historique

XVII^e^-XVIII^e^ siècle

Fermat
Leibniz
Calcul infinitésimal
(problème des tangentes)
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Newton
Calcul différentiel
(problème des vitesses instantanées)
$\dot{f}(x)$

Au XVIII^e^ siècle, **D'Alembert** pose la définition moderne.
Lagrange montre au XVIII^e^ siècle l'intérêt des dérivées pour déterminer le sens de variation d'une fonction à l'aide du signe de la dérivée (principe de Lagrange).

Fermat (Le Grand Théorème de Fermat).

4°) Vocabulaire

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$: **taux de variation** de f entre x et a $(x \neq a)$.

5°) Dérivabilité à droite ou à gauche en un réel

- **Dérivabilité à droite ; nombre dérivé à droite :** $f_d'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- **Dérivabilité à gauche ; nombre dérivé à gauche :** $f_g'(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

II. Exemples d'étude de dérivabilité par méthode directe

1°) Méthode

- On cherche la limite quand $x \to a$ du rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

  ou la limite quand $h \to 0$ du rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

- Si le résultat de cette limite est fini, alors f est dérivable en a et $f'(a)$ est égal à cette limite.

- Si cette limite n'existe pas ou est infinie, alors f n'est pas dérivable en a et il n'y a donc pas de nombre dérivé en a.

2°) Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto x^2$

$a \in \mathbb{R}$ fixé.

f est définie en a et dans un voisinage de a.
f est-elle dérivable en a ?

On pose $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$

$$= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$
$$= \frac{2ah + h^2}{h}$$
$$= 2a + h$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 2a$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
On retrouve ainsi le résultat bien connu donnant la dérivée de la fonction carrée.

3°) Contre-exemples

a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

$0 \in \mathbb{R}_+$

f est définie en 0 et dans un voisinage à droite de 0.
f est-elle dérivable en 0 (à droite) ?

On pose $\tau(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ $(h > 0)$

$= \dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \tau(h) = +\infty$

Le résultat de cette limite n'est pas fini donc f n'est pas dérivable en 0 à droite.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto |x|$

$0 \in \mathbb{R}$

f est définie en 0 et dans un voisinage de 0.
f est-elle dérivable en 0 ?

On pose $\tau(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ $(h \neq 0)$

$= \dfrac{|h|}{h}$

$\forall h > 0 \quad \tau(h) = 1$

$\forall h < 0 \quad \tau(h) = -1$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \tau(h) = 1$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 1$.

$\lim\limits_{h \to 0^-} \tau(h) = -1$

Le résultat de cette limite est fini donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0) = -1$.

$f_d'(0) \neq f_g'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

4°) Remarque

On n'utilisera cette méthode qu'en des réels particuliers (où il y a un problème).

On utilisera la plupart du temps les formules de dérivation.

III. Tangente à une courbe

1°) Définition (tangente) et conséquences

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I et a un réel fixé de I.
A est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a $\big(A(a\,;f(a))\big)$.
Lorsque f est dérivable en a, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour **tangente** T, en A, la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

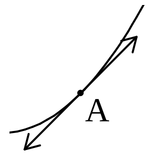
● **Par définition,** $f'(a)$ (nombre dérivé de f en a) = **coefficient directeur** de la tangente T au point d'abscisse a (droite non parallèle à l'axe des ordonnées).

● La tangente T admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(1;\, f'(a))$.

● **Formule**

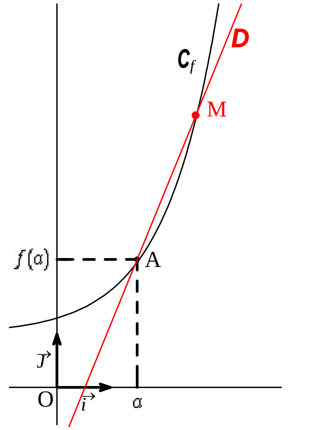
Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

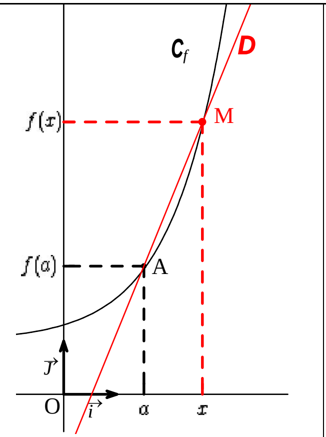
● **Représentation conventionnelle**

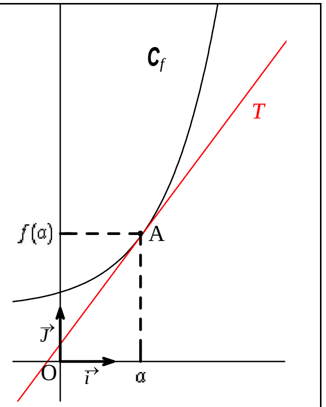


2°) Justification (notion intuitive ; l'idée de tangente)

Petit scénario qui permet de comprendre l'idée de tangente à une courbe.
Bien distinguer ce qui est fixe : le point A ; la tangente T en A de ce qui est mobile : le point M ; la droite (AM).







$\mathcal{D} = (\mathrm{AM})$ est sécante à la courbe Coefficient directeur de $\mathcal{D}$ $= \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	M n'est plus statique mais mobile. $\mathcal{D}$ pivote autour de A.	$x \neq a$ On fait tendre *x* vers *a*. Quand *x* tend vers *a*, M se rapproche de A. La droite $\mathcal{D}$ tend à être tangente en A à la courbe.

La tangente comme position limite des sécantes.

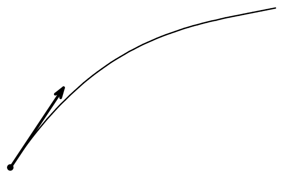
La tangente en A est la « position limite » des sécantes (AM) quand *x* tend vers *a*.

Tangente < latin **« tangere »** = toucher
À l'origine au XVII^{e} siècle, on ne parlait pas de tangente mais de **« touchante »**.

3°) Définition (demi-tangente)

• Lorsque *f* est <u>dérivable à droite en *a*</u>, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour **<u>demi-tangente</u>** au point A d'abscisse *a* la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(1;\ f_d\,'(a)\right)$.
• Lorsque *f* est <u>dérivable à gauche en *a*</u>, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour **<u>demi-tangente</u>** au point A d'abscisse *a* la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(1;\ f_g\,'(a)\right)$.

Représentation conventionnelle

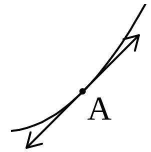
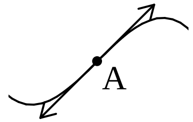


Une seule flèche.

Retenir qu'une demi-tangente est une demi-droite.

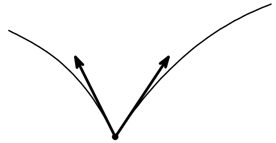
On a une demi-tangente à droite lorsque la fonction est dérivable à droite mais pas à gauche.

4°) Allure de la courbe au voisinage de la tangente

Point ordinaire	Point d'inflexion
	

Les points d'inflexion seront étudiés dans le paragraphe **XV**.

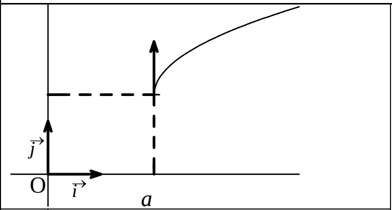
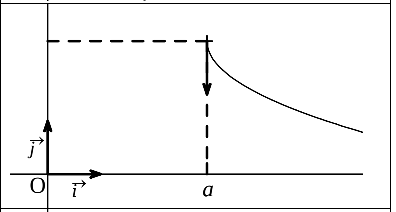
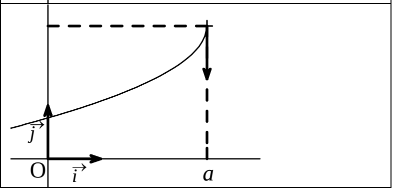
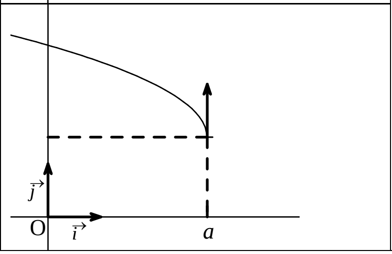
Quand on a une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite, on parle de **point anguleux**.



5°) Tangente ou demi-tangente verticale

(Ne pas confondre avec AV → aucun rapport)

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
$(a \in \mathrm{I})$

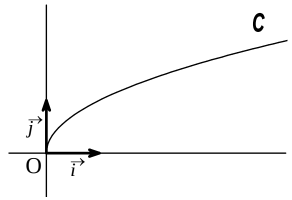
<table>
<tr><th>Hypothèse</th><th colspan="2">Interprétation graphique</th></tr>
<tr><td>$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \text{ à droite} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \end{cases}$</td><td></td><td rowspan="4">f n'est pas dérivable en A mais C_f présente une demi-tangente verticale au point d'abscisse a. (d'équation réduite $x = a$)</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \text{ à droite} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \text{ à gauche} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} f \text{ est continue en } a \text{ à gauche} \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \end{cases}$</td><td></td></tr>
</table>

En général, le tableau de variations donne l'allure de la courbe au voisinage du point.

Exemple :

Représentation graphique de la fonction racine carrée à l'origine.
On peut vérifier le résultat en utilisant Geogebra.
On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
On tape Tangente[0,*f*] (on veut tracer la demi-tangente à la courbe au point O).
Rien ne se passe : Geogebra ne trace pas les tangentes verticales.

La courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en O (cette demi-tangente au point O est la demi-droite [O*y*)).



Une demi-tangente est représentée par une seule flèche.

N.B. : Il est bien évident que la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ n'est plus applicable pour une tangente (ou une demi-tangente verticale).

6°) Règles de tracés des courbes

- On commence par tracer les tangentes ou demi-tangentes particulières :
  - horizontales $\left(f'(a) = 0 \right)$
  - verticales
  - d'inflexion

  en respectant la position relative de la courbe par rapport à ces tangentes au voisinage du point
- Les droites asymptotes (AH, AV, AO) ou courbes asymptotes (toujours en $+\infty$ ou en $-\infty$).
- On utilise ensuite le tableau de variation et éventuellement un tableau de valeurs.
  Vérification sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.

IV. Approximation affine tangente

Intérêt de ce paragraphe : théorique plus que pratique.

1°) Propriété (Formule d'approximation affine tangente)

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
$a \in \mathrm{I}$ fixé.

Si *f* est dérivable en *a*, alors il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 telle que, pour tout réel *h*, on ait $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\,\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
(Formule d'AAT en *a* ou au voisinage de *a*)

Recopier le *h* en rouge (variable tandis que *a* est fixe dans cette formule).

2°) Application au calcul numérique approché

Mêmes hypothèses qu'au 1°).

$$\boxed{\text{Pour } h \text{ « proche » de 0, on a : } f(a+h) \approx f(a) + hf'(a).}$$

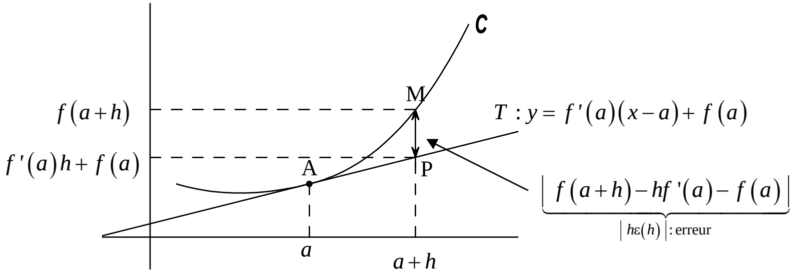
Bien faire la différence entre la formule d'AAT donnée au 1°) sous forme d'une égalité et cette formule (donnée avec le signe ≈).

3°) Démonstration

On pose $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$ si $h \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$.

On a $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = f'(a) - f'(a) = 0$.

Pour tout h assez proche de 0, on a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\,\varepsilon(h)$.



$\text{PM} = \left| h\varepsilon(h) \right|$

Géométriquement, cela consiste à remplacer au voisinage du point A d'abscisse *a* la courbe par un morceau de tangente.

4°) Intérêt en T[ale]

- calcul mental (calcul numérique approché) : calcul compliqué $\xrightarrow{\text{formule d'AAT}}$ calcul simple
- démonstrations des propriétés d'opérations sur les fonctions dérivables (nous ne le ferons pas cette année)
- méthode d'Euler pour les équations différentielles (voir plus tard et *Cours de Physique*)

5°) Exemples ; approximations affines tangentes à connaître

$f(a+h) = f'(a)h + f(a) + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

$f : x \mapsto x^2$	$a = 1$	$f(1) = 1$	$f'(1) = 2$	$(1+h)^2 = 1 + 2h + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$a = 1$	$f(1) = 1$	$f'(1) = -1$	$\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$a = 1$	$f(1) = 1$	$f'(1) = \dfrac{1}{2}$	$\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{h}{2} + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
$f : x \mapsto \sin x$	$a = 0$	$f(0) = 0$	$f'(0) = 1$	$\sin h = h + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

La connaissance explicite de la fonction ε ne présente aucun intérêt.

Néanmoins, dans le 1[er] cas, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$ donc dans ce cas : $\varepsilon(h) = h$.

Dans les autres cas, il n'y a aucun intérêt à expliciter $\varepsilon(h)$.

Application numérique

$\dfrac{1}{1{,}001} = \dfrac{1}{1 + 0{,}001}$

On applique la formule d'AAT pour $\dfrac{1}{1+h}$ avec $h = 0{,}001$

$\dfrac{1}{1{,}001} \approx 1 - 0{,}001$ donc

$$\boxed{\dfrac{1}{1{,}001} \approx 0{,}999}$$

Quelle est l'erreur ?

Avec la calculatrice, on trouve : $\dfrac{1}{1{,}001} = 0{,}99900099...$

Donc pour $h = 0{,}001$, on a : $h\varepsilon(h) = 0{,}00000099...$ (erreur)

On voit donc l'intérêt des approximations pour le calcul mental.

6°) Approximations non affines (formules admises sans démonstration)

Pour *h* proche de 0, on a :

$(1+h)^3 \approx 1 + 3h + \boxed{\mathbf{3h^2}}$

$\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h + \boxed{\mathbf{h^2}}$

$\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h + \boxed{\mathbf{h^2 - h^3}}$

$\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{3h^2}{8}$

Ce sont des approximations **non affines** mais plus précises.
Elles sont très utilisées en mathématiques et en physique.

N.B. : La calculatrice fonctionne en approximation non affine.
(La calculatrice utilise des formules de ce type mais avec plus de termes pour effectuer des calculs).

Approximations utilisées en physique (par exemple, lors de la diffraction de la lumière)

$\sin\theta \approx \theta$ pour θ proche de 0

$\tan\theta \approx \theta$ pour θ proche de 0 (θ en radians)

7°) Réciproque de la propriété

• Énoncé :

> $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
> $a \in \mathrm{I}$ fixé.
>
> S'il existe un nombre A et une fonction ε définie dans un voisinage de 0 telle que, pour tout réel *h*, on ait $f(a+h) = f(a) + \mathrm{A}h + h\,\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$,
>
> alors *f* est dérivable en *a* et $f'(a) = \mathrm{A}$.

• Démonstration : assez aisée

• Intérêt : démontrer qu'une fonction est dérivable en un réel.

V. Lien entre la continuité et la dérivabilité

1°) Propriété

> Si *f* est dérivable en *a*, alors *f* est continue en *a*.

Si *f* est continue en *a*, alors *f* n'est pas forcément dérivable en *a*.

Autrement dit, *f* dérivable en *a* $\Rightarrow$ *f* continue en *a* (réciproque fausse)
(Ça ne marche que dans ce sens-là)

2°) Démonstration (ROC)

Fonction continue en *a*	**Fonction dérivable en *a***
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$	La limite de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existe quand $x \to a$ existe et est finie. Dans ce cas, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Hypothèse : *f* est dérivable en *a*.

But : on veut démontrer que *f* est continue en *a*.

$$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \setminus \{a\} \quad f(x) - f(a) = (x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

On prend la limite des deux facteurs.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to a} (x-a) = 0 \\ &\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \end{aligned}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a) \right] = 0 .$$

D'où : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Donc *f* est continue en *a*.

N.B. : on pourrait aussi utiliser la formule d'AAT.

3°) Contre-exemples

- La fonction $x \mapsto |\,x\,|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.
- Il existe même des fonctions continues en tout réel mais dérivables en aucun réel.

4°) Contraposée

f dérivable en *a* $\Rightarrow$ *f* continue en *a*
$\downarrow$ **Contraposition**

f non continue en *a* $\Rightarrow$ *f* non dérivable en *a*

$P \Rightarrow Q$
$\downarrow$ **Contraposition**
(non Q) $\Rightarrow$ (non P) (négations)

Traduction en langage courant

« S'il pleut, alors je prends mon parapluie. »
« Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas. »

VI. Fonction dérivée

Passage local$\longrightarrow$ global

1°) Définition

> *f* est une fonction définie sur un intervalle I.
>
> - On dit que *f* est **dérivable** $\boxed{\textbf{sur}}$ **I** lorsque *f* est **dérivable** en <u>tout</u> réel de I.
>
> - La **fonction dérivée** de la fonction *f* est la fonction $\begin{aligned} f' : \mathrm{I} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$.

Extension de la définition

Lorsque *f* est définie sur un domaine *D* qui est la réunion de plusieurs intervalles, on dit que *f* est dérivable sur *D* pour exprimer qu'elle est dérivable sur tous les intervalles qui constituent *D*.
La dérivée de *f* est alors définie sur *D*.

2°) Lien entre fonction dérivable et fonction continue (résulte du **V. 1°)**)

> Si *f* est dérivable sur I, alors *f* est continue sur I.

3°) Dérivées usuelles

$f(x)=$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)=$
$k\ (k\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sqrt{ax+b}$	$\{x\in\mathbb{R} / ax+b\geq 0\}$	$\{x\in\mathbb{R} / ax+b> 0\}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$
$\frac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0)$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(**Démonstrations :** voir cours de 1ère)

4°) Domaine de dérivabilité

● Définition

C'est l'ensemble des réels en lequel la fonction est dérivable.

● Exemple : fonction racine carrée

$f : x \mapsto \sqrt{x}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+$; $\boldsymbol{D}_{f'}=\mathbb{R}_+^*$

● Remarque

Le domaine de dérivabilité peut être plus petit que le domaine de définition.

VII. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

1°) Règles d'opérations

u et v sont deux fonctions définies sur un intervalle I.
k est un réel fixé.

	Version locale	Version globale
Somme	Si u et v sont dérivables en $a\in \mathrm{I}$, alors $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$	Si u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=u'+v'$
Produit par un réel	Si u est dérivable en $a\in \mathrm{I}$, alors ku est dérivable en a et $(ku)'(a)=ku'(a)$.	Si u est dérivable sur I, alors ku est dérivable sur I et $(ku)'=ku'$.
Produit	Si u et v sont dérivables en $a\in \mathrm{I}$, alors uv est dérivable en a et $(uv)'(a)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$.	Si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et $(uv)'=u'v+uv'$.
Inverse	Si u est dérivable en $a\in \mathrm{I}$ et $u(a)\neq 0$, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{u}\right)'(a)=-\frac{u'(a)}{[u(a)]^2}$.	Si u est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$.
Quotient	Si u et v sont dérivables en $a\in \mathrm{I}$ et $v(a)\neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a)=\frac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{[v(a)]^2}$.	Si u et v sont dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Autre formulation (en français) :

- La **somme** de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est dérivable sur I et la dérivée est égale à la somme des dérivées.
- Le **produit** de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est dérivable sur I.
- Le **quotient** de deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction du dénominateur ne s'annulant pas sur I, est dérivable sur I.

2°) Démonstration (pour la somme) ROC

H_1 : u est dérivable en a
H_2 : v est dérivable en a

Démontrons que $u + v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

On pose $\tau(h)=\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$ $(h\neq 0)$

$$=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{D'après } H_1 \quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)\\ \text{D'après } H_2 \quad \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}=v'(a)\end{array}\right\}\text{ donc } \lim_{h\to 0}\tau(h)=u'(a)+v'(a).$$

Le résultat de cette limite est fini donc $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

Autre méthode : avec la formule d'AAT.

3°) Corollaire

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition.

4°) Remarque graphique

Si f est dérivable sur un intervalle I, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en tout point d'abscisse $a \in$ I.

5°) Point-méthode : comment démontrer qu'une fonction est dérivable en un réel, est dérivable sur un intervalle

f dérivable **en un réel a**	f dérivable **sur un intervalle I**
Il faut étudier la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a (ou de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0) et il faut regarder si elle est finie. On adapte pour la dérivabilité à droite et pour la dérivabilité à gauche.	(c'est-à-dire dérivable en tout réel de l'intervalle I) On applique les théorèmes d'opérations (somme, produit, quotient et composée). **Cas particulier :** fonctions polynômes et rationnelles.

VIII. Notation de Leibniz (différentielle)

1°) Notation

$\boxed{f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}}$ (Newton : $\dot{f}(x)$)

Notation de Lagrange

2°) Exemples

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}=\cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{at}\right)}{\mathrm{d}t}=a\mathrm{e}^{at}$$

3°) Intérêt

Permet de préciser par rapport à quelle variable on dérive.
Vitesse volumique de réaction :

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\times\frac{1}{\mathrm{V}}$$

Intensité : $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$

4°) Origine de la notation

$$m=\frac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$x\to a \iff \Delta x\to 0$

On a alors : $\Delta f(x)\to 0$

Δ remplacé par d

$$\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}=f'(a)$$

(En physique, passage du macroscopique au microscopique :
$\dfrac{\Delta N}{N}=-\lambda\Delta t$; $\dfrac{\mathrm{d}N}{N}=-\lambda\mathrm{d}t$; $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N$)

IX. Dérivées successives

1°) Définition

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Lorsque la fonction f' est dérivable sur I, alors on peut définir la **dérivée seconde** de f : $f''=(f')'$.
Lorsque la fonction f'' est dérivable sur I, alors on peut définir la **dérivée troisième** de f : $f'''=f^{(3)}=(f'')'$.

N.B. : L'ordre de dérivation se met entre parenthèses (pour ne pas confondre avec un exposant de puissance).

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^3+5x^2-4x+1$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

Calculer les dérivées successives de *f*.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 10x - 4$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x + 10$

f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'''(x) = 6$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(4)}(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = 0 \qquad (n \geq 4)$ (« de proche en proche »)

3°) Notation différentielle de Leibniz

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$ (attention à la place du 2 ; pas de signification algébrique).

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

4°) Utilisation en physique

En mécanique	En électricité
Vitesse instantanée : $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$ Accélération : $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$.	Intensité $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$ $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{q}$

X. Dérivée d'une composée

1°) Théorème de composition version locale et formule de dérivation d'une composée

f et *g* sont deux fonctions.
Si *f* est dérivable en *a* et *g* est dérivable en $f(a)$ (*f* étant définie sur un intervalle contenant *a* et *g* étant définie sur un intervalle contenant $f(a)$), alors $g \circ f$ est dérivable en *a* et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'[f(a)]$.

2°) Justification **(pas ROC mais à connaître)**

On pose $b = f(a)$

$\tau_f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - b}{x - a}$ (taux de variation de *f* en *a*)

$\tau_g(x) = \frac{g(x) - g(b)}{x - b}$ (taux de variation de *g* en *b*)

$\tau_{g \circ f}(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$ (taux de variation de $g \circ f$ en *a*)

On cherche $\lim\limits_{x \to a} \tau_{g \circ f}(x)$.

On effectue une réécriture de $\tau_{g \circ f}$ à l'aide de τ_f et τ_g.

$$\begin{aligned}
\tau_{g \circ f}(x) &= \frac{g[f(x)] - g(b)}{x - a} \\
&= \frac{g[f(x)] - g(b)}{f(x) - b} \times \frac{f(x) - b}{x - a} \\
&= \tau_g[f(x)] \times \tau_f(x)
\end{aligned}$$

H_1 : *f* est dérivable en *a* donc $\lim\limits_{x \to a} \tau_f(x) = f'(a)$.

H_2 : *g* est dérivable en *b* donc $\lim\limits_{x \to b} \tau_b(x) = g'(b)$.

On utilise la limite d'une composée.

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = b \text{ (car } H_1 \text{ entraine que } f \text{ est continue en } a\text{)} \\
\lim\limits_{x \to b} \tau_b(x) = g'(b) \quad (H_2)
\end{array}\right\}$$

Par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to a} \tau_g[f(x)] = g'(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{On en déduit que } \lim_{x \to a} \tau_{g \circ f}(x) &= g'(b) \times f'(a) \\
&= g'[f(a)] \times f'(a)
\end{aligned}$$

La démonstration rigoureuse utilise la formule d'AAT.

3°) Théorème de dérivation d'une composée version globale et formule de dérivation d'une composée

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J.
g est une fonction définie et dérivable sur J.
La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I} \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$.

4°) Applications : formules déduites du théorème

(à utiliser directement en exercices sans les redémontrer)

u est une fonction définie sur un intervalle I.

Formule 1 $(n \in \mathbb{N}^*)$

Si *u* est dérivable sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$.

Formule 2

Si u est dérivable sur I et si $\forall x \in \mathrm{I}\;\; u(x) > 0$ (inégalité stricte), alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Formule 3

Si u est dérivable sur I, alors les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I et
$(\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u$.

Formule 4 $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

Si u est dérivable sur I et si $\forall x \in \mathrm{I}\;\; u(x) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

Formule 5

Si u est dérivable sur I et a et b sont deux réels, alors la fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable sur son intervalle de définition et $f'(x) = a \times u'(ax+b)$

Démonstration de la formule 1

On exprime la fonction u^n comme composée de deux fonctions.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) = X & \longmapsto & v(X) = X^n \end{array}$$

$$v \circ u$$

u est dérivable sur I à valeurs dans $\mathrm{J} = \mathbb{R}$.
v est dérivable sur J et $\forall x \in \mathbb{R}\quad v'(x) = nx^{n-1}$.
Donc d'après le théorème de composition, $v \circ u$ est dérivable sur I.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I}\;\; (v \circ u)'(x) &= u'(x) \times v'\left[u(x)\right] \\ &= u'(x) \times \left[n \times \left(u(x)\right)^{n-1}\right] \\ &= nu'(x) \times \left[u(x)\right]^{n-1} \end{aligned}$$

XI. Étude de la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

1°) Fonctions usuelles : polynômes ou rationnelles

Exemple : $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

2°) Opérations algébriques (sommes, produits, quotients)

Exemples : $f : x \mapsto 3x + 1 - \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \mapsto 3x + 1$ et $x \mapsto -\cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (règle sur la somme).

3°) Composées (fonctions avec radicaux)

Exemple 1 : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 0$ ce qui est toujours vrai.

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

On pose $u(x) = x^2 + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}\quad u(x) > 0$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exemple 2 : $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
SGN de $(1+x)$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $(1-x)(1+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{D}_f = [-1\,;1]$ (fermé)

On pose $u(x) = 1 - x^2$.

$\forall x \in]-1\,;1[\quad u(x) > 0$ et u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur $]-1\,;1[$ (ouvert).

⚠ La règle permet de dire que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ mais on ne sait pas si f est dérivable en 1 ou en – 1.

Pour l'ensemble de définition, le radicande doit être positif ou nul.
Pour l'ensemble de dérivabilité avec la règle, le radicande doit être strictement positif.

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\quad f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Il reste à étudier directement (avec le taux de variation) la dérivabilité de *f* à gauche en 1 et à droite en -1.
Dans ce cas, la règle sur $\sqrt{u}$ ne s'applique pas (car il s'agit de valeurs qui annulent *u*).
On démontre en fait que *f* n'est pas dérivable à gauche en 1 et à droite en -1.

(Comme la fonction *f* n'est pas définie à droite de 1, on n'étudie pas la dérivabilité à droite 1 ; comme la fonction *f* n'est pas définie à gauche de – 1, on n'étudie pas la dérivabilité à gauche de – 1).

XII. Dérivée et sens de variation

1°) Théorème 1 (admis sans démonstration)
Principe de LAGRANGE

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- *f* est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \geq 0$.
- *f* est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) \leq 0$.
- *f* est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = 0$.

2°) Théorème 2 (admis sans démonstration)

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si *f '* est strictement positive sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors *f* est strictement croissante sur I.
- Si *f '* est strictement négative sauf éventuellement en des réels isolés où la fonction dérivée est nulle, alors *f* est strictement décroissante sur I.

Figure

3°) Tableau de variation

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de *f*	

⚠ à la légende !

Dans un tableau de variation, on ne met que des valeurs exactes.
Pas de barres simples sur la dernière ligne d'un tableau de variation ; que des doubles barres.

- Dans un tableau de variation, on laissera toujours les <u>valeurs exactes des extremums</u>.
- Les tableaux de variations doivent comporter les limites aux <u>bornes ouvertes</u> de son ensemble de définition.
- On cherche les **valeurs charnières**.

4°) Variations des fonctions trinômes du second degré

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\underbrace{2a}_{\text{signe de } 2a \,=\, \text{signe de } a}x+b$$

$$2ax+b=0$$
$$x=-\frac{b}{2a}$$

Tableau de variation

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de *f*	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de *f*	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

La fonction $f: x\mapsto ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) admet **un extremum global** sur $\mathbb{R}$ obtenu pour $x=-\frac{b}{2a}$:
- **minimum** si $a>0$
- **maximum** si $a<0$

$\mathcal{C}_f$ est une **parabole** de **sommet** $\mathrm{S}\left(-\frac{b}{2a}\,;\,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ tournée $\left|\begin{array}{l}\text{vers le haut si } a>0\\ \text{vers le bas si } a<0\end{array}\right.$.

$\mathcal{C}_f$ admet une **tangente horizontale** au sommet et admet la droite d'équation $x=-\dfrac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie** lorsque le repère est orthogonal.

(tracés rapides de paraboles par fonctions associées :
$y=x^2+3$; $y=(x-3)^2$; $y=(x-2)^2+1$; $y=\dfrac{1}{2}x^2$; éventuellement, suite de transformations)

XIII. Extremums

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
I ouvert.

1°) Propriété 1

Si f admet un **extremum local** en $a \in \mathrm{I}$, alors $f'(a)=0$.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse *a*.

2°) Propriété 2

Si *f'* s'annule et change de signe en *a*, alors *f* admet un extremum local en *a*.

x		a	
Signe de $f'(x)$	–	0	+
Variations de f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

minimum local

x		a	
Signe de $f'(x)$	+	0	–
Variations de f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

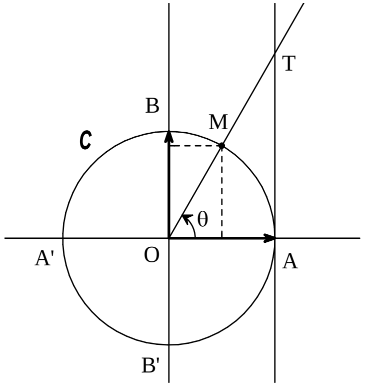
maximum local

XIV. Étude de la fonction tangente

1°) Définition

On appelle **fonction tangente** la fonction $f : x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2°) Lecture graphique de la tangente



$\tan x = \overline{\mathrm{AT}}$

3°) Ensemble de définition

$\tan x$ existe $\Leftrightarrow$ $\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

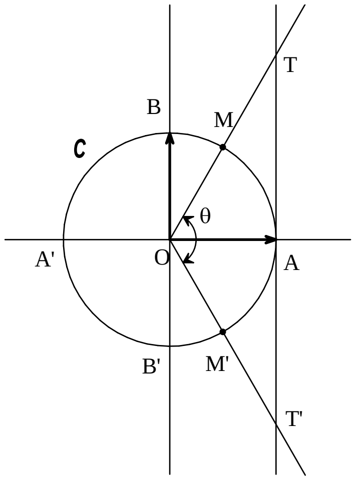
4°) Parité

$\mathcal{D}_f$ est centré en 0 (si $x\in\mathcal{D}_f$, alors $-x\in\mathcal{D}_f$)

$$\forall x\in\mathcal{D}_f \quad f(-x)=\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x = -f(x)$$

***f* est impaire**

Visualisation sur le cercle trigonométrique

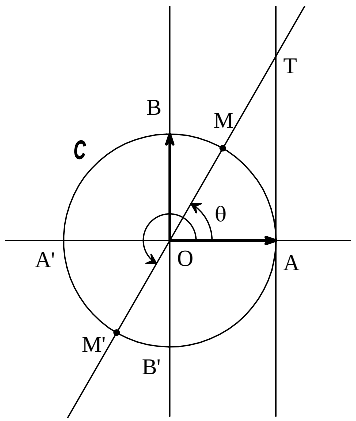


5°) Périodicité

On démontre que $T = \pi$ est une période de *f*.
Si $x \in \boldsymbol{D}_f$, alors $(x+\pi) \in \boldsymbol{D}_f$

$$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \quad f(x+\pi) = \tan(x+\pi)$$
$$= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$
$$= \frac{-\sin x}{-\cos x}$$
$$= \tan x$$
$$= f(x)$$

f est périodique de période $T = \pi$.



On peut donc étudier *f* sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, comme *f* est impaire, on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

6°) Dérivée

f est dérivable sur $\boldsymbol{D}_f$ (règle sur les quotients).

$$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \quad f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Retenir

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ou} \quad (\tan x)' = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Suivant les cas, il est plus commode d'utiliser l'une ou l'autre.

7°) Variations

$\forall x \in \boldsymbol{D}_f \quad f'(x) > 0$
Donc *f* est strictement croissante sur les intervalles qui constituent $\boldsymbol{D}_f$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
SGN de $f'(x)$		+	
Var. de *f*	$+\infty$	↗	$+\infty$

8°) Limites

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = ?$$

f est définie dans un voisinage à gauche de $\frac{\pi}{2}$ sauf en $\frac{\pi}{2}$.

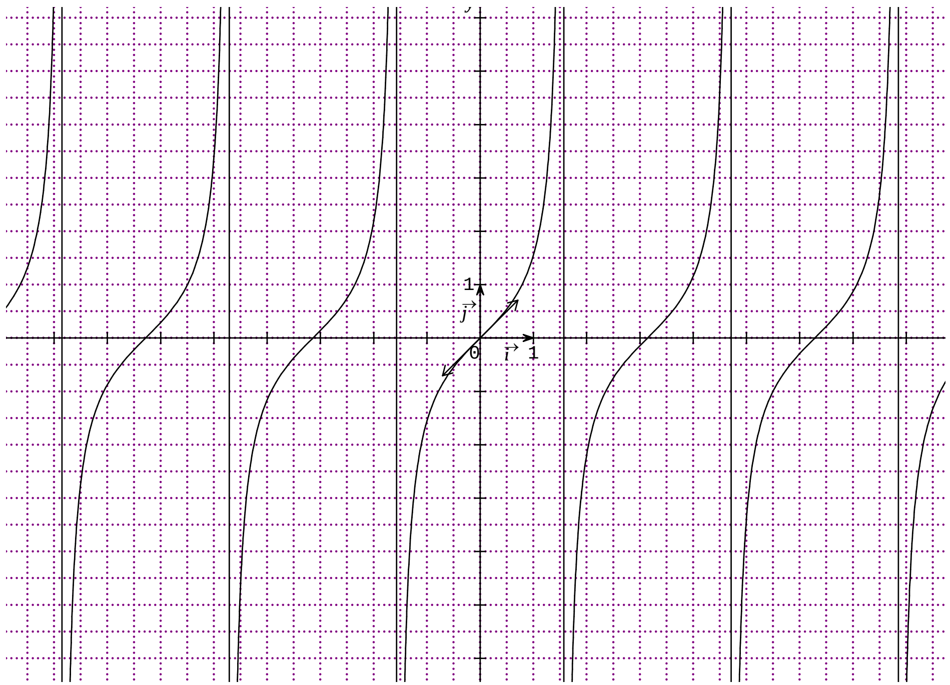
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
SGN de $\cos x$	0	$+$	0

De même, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet les droites d'équations réduites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ pour AV.

9°) Représentation graphique



$\tan 0 = 0$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

10°) Tangente à l'origine

$\tan'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$.

La tangente en O a pour coefficient directeur 1.

Nous admettrons que $\mathcal{C}_f$ présente un point d'inflexion en O (c'est-à-dire que la courbe traverse la tangente).

11°) Propriétés de la courbe

● $\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie car la fonction tangente est impaire.

● $\mathcal{C}_f$ est globalement invariant par la translation de vecteur $\vec{u} = \pi\vec{i}$ car f est périodique de période π.

Conséquence : $\mathcal{C}_f$ admet les droites d'équations réduites $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ pour AV.

XV. Compléments : points d'inflexion d'une courbe

1°) Définition

● On dit qu'un point d'une courbe est un **point d'inflexion** lorsque la position relative de la courbe par rapport à cette tangente change ; on dit aussi que la courbe « traverse » sa tangente en ce point.

● On parle alors de **tangente d'inflexion**.

2°) Propriété

f est une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
x_0 est un réel fixé dans I.
Si f'' s'annule en x_0 et change de signe au voisinage de x_0, alors le point M_0 de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

3°) Application : méthode pratique pour déterminer les points d'inflexion d'une courbe

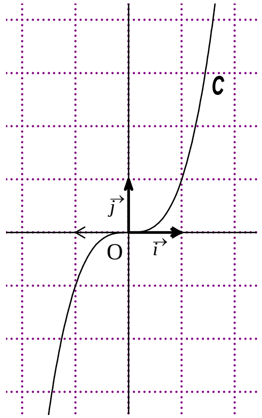
On calcule la dérivée seconde de la fonction.
On étudie son signe dans un tableau de signe.

4°) Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.
La courbe représentative de f admet l'origine du repère pour point d'inflexion.
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$
f'' s'annule et change de signe en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe en 0.



O est point d'inflexion de la courbe C.

5°) Démonstration

L'équation réduite de la tangente T à C au point M_0 s'écrit $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Il s'agit d'étudier la **position relative** de C et de T.
On va étudier la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)]$ au voisinage de x_0.
(repasser en rouge la variable ; observer que $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont des constantes).

φ est définie sur I et φ est deux fois dérivable sur I comme f.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
(on prendra garde que $f'(x_0)$, $f(x_0)$ et x_0 sont des constantes)
$\forall x \in \mathrm{I} \quad \varphi''(x) = f''(x)$.
On va dresser les tableaux de variation correspondant aux deux cas possibles.

On notera que $\varphi(x_0) = f(x_0) - [f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$
et que $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

1er cas :

x		x_0	
Signe de $\varphi''(x) = f''(x)$	$-$	0	$+$
Variation de φ'	↘	0	↗
Signe de $\varphi'(x)$	$+$	0	$+$
Variation de φ	↗	0	↗
Signe de φ	$-$	0	$+$
Position de C par rapport à T	C est au-dessous de T	C et T sont sécantes	C est au-dessus de T

C et T sont sécantes au point M_0.
La position de C par rapport à T change au voisinage de x_0 donc M_0 est un **point d'inflexion**.

2e cas :

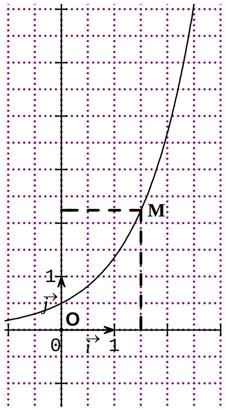
On traite de manière similaire le cas où f'' est d'abord positive puis négative.

XVI. Complément sur les branches infinies

1°) But

f est fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\mathcal{C}_f$ présente une branche infinie lorsque $x \to +\infty$.
Etudier la branche infinie.



M est un point quelconque de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x \neq 0$.
La droite (OM) est une sécante.

Le coefficient directeur de (OM) est égal à $m = \dfrac{y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{O}}} = \dfrac{f(x)}{x}$

2°) Étude de cas

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, on dira que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique** de direction (Oy) lorsque $x \to +\infty$.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on dira que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique** de direction (Ox) lorsque $x \to +\infty$.
Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \ (a \in \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] = +\infty$, on dira que $\mathcal{C}_f$ présente une **branche parabolique** de direction $\Delta : y = ax$ lorsque $x \to +\infty$.

Dans tous les cas, on ne parle pas d'asymptote mais de **direction asymptotique**.

3°) Remarque

Une branche parabolique, ça ne peut être qu'en $\boxed{+\infty \text{ ou en } -\infty}$.