Narration de recherche

Sujet :

Etant donnés quelques points placés sur une feuille, combien peut on tracer (au plus) de segments joignant deux quelconques de ces points ?

Si j'ai	Je peux tracer au plus
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	......
6 points	......
7 points	......
12 points	......
20 points	......
108 points	......
n points (*n* est un entier positif)	......

Vous raconterez sur votre feuille

1°) les différentes étapes de votre recherche
2°) les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode
3°) la façon dont vous expliqueriez votre solution à un camarade que vous devez convaincre ce qui constituera pour vous une démonstration.

Attention !! L'évaluation ne portera pas sur la nature de la solution (juste, fausse, incomplète...) mais sur les trois points évoqués ci-dessus.

Compte rendu de la narration de recherche

Ce problème appartient à la famille des **problèmes de dénombrement** : il faut compter.

OBSERVER, EXPERIMENTER

On faisait des essais sur les petites valeurs de n. Le tracé des figures est une étape importante de la recherche.

1 point : 0 segment
2 points : 1 segment
3 points : 3 segments
4 points : 6 segments
5 points :

On constate facilement que plus le nombre de points augmente, plus le nombre de segments augmente.

Obstacle, difficulté : les figures deviennent de plus en plus compliquées, même si on les fait avec *Geogebra*. On ne s'en sort plus très rapidement.

On voit assez vite que le problème est de trouver une formule qui permet de relier le nombre de segments au nombre de points (autrement dit, on cherche une fonction f qui permet d'exprimer le nombre de segments en fonction du nombre de points).

On peut disposer les résultats dans un tableau (en pensant par exemple au triangle de Pascal).

Nombre de points	1	2	3	4	5			
Nombre de segments	0	1	3	6	10			

CONJECTURER

1. 1ère voie

On voit que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité : le nombre de segments n'est pas proportionnel au nombre de points.

On s'aperçoit que la relation entre le nombre de points et le nombre de segments ne relève ni du modèle linéaire ni du modèle affine.
Cette relation n'est pas simple.

On cherche un lien logique entre les nombres de la 2e ligne.

On peut trouver rapidement comment trouver chaque nombre à partir du précédent.

Nombre de points	1	2	3	4	5			
Nombre de segments	0	1	3	6	10			

+ 1 + 2 + 3

On obtient ainsi un **procédé algorithmique** permettant de calculer les nombres de segments de proche en proche. A ce stade, on est dans le domaine de la conjecture.

Cela peut déboucher sur la mise en place d'un algorithme (voir plus loin).

Problème : on n'a toujours pas de formule explicite donnant le nombre de segments en fonction du nombre de points.

2. 2e voie

En « manipulant » le nombres de la deuxième ligne, on pouvait **conjecturer** que le nombre de segments est donné par la formule : $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ou $\dfrac{n^2-n}{2}$.

[On pouvait nommer une fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}$.
Il semble que le nombre de segments soit égal à $f(n)$.
La fonction *f* est une fonction polynôme du second degré que l'on peut représenter dans un repère : la courbe est une parabole.
On sélectionne les points dont les abscisses sont des entiers naturels].

Problème : La formule relève de la **conjecture**.

On peut tester la **« résistance » de la conjecture** (selon l'expression de Jean-Manuel Ménuy de l'IREM de Lyon) sur les premières valeurs de *n*.
Même si la formule marche pour quelques valeurs de *n*, on ne peut affirmer qu'elle est vraie pour toutes ls valeurs de *n*.

Il faut **démontrer** cette conjecture.

On peut extrapoler la formule pour un nombre quelconque de points mais la formule extrapolée ne peut être tenue pour vraie tant qu'elle n'a pas été démontrée.

Avec les deux voies, donner le nombre de segments pour 108 points à partir de cette formule n'est donc pas possible.

DÉMONTRER

- Démontrer le lien logique entre deux nombres

- Démontrer la formule

Il y a plusieurs voies pour **démontrer la formule conjecturée**.

1ère manière : faire un raisonnement général valable pour *n* quelconque

2e manière : procéder par « récurrence » ; ce raisonnement sera étudié en Terminale mais il peut être vu sous la forme d'un « raisonnement de proche en proche ».

Raisonnement général :

Il y a deux façons.

1. On numérote les points.

Chaque point est peut être relié à tous les autres points donc $n - 1$ segments peuvent être tracés à partir de chaque point.
Comme il y a n points, on obtient $n\ (n - 1)$.
On divise par 2 car sinon on compterait deux fois chaque segment : $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. Le 1^{er} point peut être joint à $n - 1$ points. D'où $n - 1$ segments.
Le 2^{e} point peut être joint à $n - 2$ points. D'où $n - 2$ segments.

Le n^{e} point peut être joint à 0 point. D'où 0 segment.

Chaque segment n'a été compté qu'une seule fois.

On doit donc calculer la somme : $0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 2) + (n - 1)$.

Il s'agit de calculer (d'exprimer) la somme des entiers naturels de 0 à $n - 1$.
On cherche une **formule sommatoire**.

Cela n'est pas possible avec les connaissances de début de $1^{\text{ère}}$ S.

Il y a essentiellement trois idées possibles :

- l'idée de Gauss

- la méthode de Pascal

- la méthode de sommation par télescopage.

La méthode de Pascal et la méthode de sommation par télescopage feront l'objet d'un DM.

La méthode de Gauss

Gauss est un mathématicien allemand né en 1777 et mort en 1855.
Il avait un maître d'école particulièrement méchant.

Celui-ci demanda un jour à Gauss de calculer la somme de tous les entiers naturels de 0 à 100.
Il pensait que Gauss passerait un certain temps à trouver la réponse.
Quelle ne fut pas la surprise du maître d'école d'entendre son élève lui donner la réponse quelques minutes plus tard : 4 050 ?

Comment Gauss avait-il fait ?

Il écrivit la somme en extension (avec des petits points) : $0 + 1 + 2 + \ldots + 99 + 100$ (avec les entiers dans l'ordre croissant jusqu'à 100).

Il écrivit la somme en extension dans l'autre sens : 100 + 99 + … + 2 + 1 + 0 (avec les entiers dans l'ordre décroissant à partir de 100).
On note S cette somme.

On dispose les deux sommes les unes en dessous de l'autre.

$$S = 0 + 1 + 2 + \ldots + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 0$$

On additionne ces deux égalités membre à membre.
On obtient :

$$2\,S = \underbrace{100 + 100 + \ldots + 100}_{101 \text{ termes}}$$

Soit : $2\,S = 100 \times 101$

$$S = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$S = 50 \times 101$$

$$S = 4\,050$$

La légende dit que le maître, réalisant le génie de Gauss, fut rempli d'admiration pour son élève.

Il devint alors gentil avec ses élèves car il ne voulait pas passer à côté du génie de l'un d'entre eux !

La méthode de Gauss s'applique pour la somme de tous les entiers naturels jusqu'à un entier naturel quelconque N.

On trouve :

$$\boxed{1 + 2 + \ldots + N = \frac{N \times (N+1)}{2}}$$

Cette formule sommatoire qui sera revue plus tard peut déjà être apprise à ce moment de l'année (elle sera revue au moment des suites).

Dans notre cas, on trouve que le nombre de segments est bien égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Raisonnement par récurrence

Bilan :

Situation de recherche très riche.

Les nombres trouvés sont un lien avec les « nombres triangulaires ».

Les huit moments de l'activité mathématique :

- Poser un problème, modéliser
- Expérimenter, prendre des exemples
- Conjecturer
- Se documenter
- Bâtir une démonstration
- Mettre en œuvre des outils adéquats
- Évaluer la pertinence des résultats
- Communiquer

Appendice : algorithme et programme

L'algorithme utilise une boucle Pour (nombre d'itérations donné).