1ère S # Exercices sur l'homothétie

1 Traduire chacune des informations suivantes par une égalité vectorielle.
1°) B est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport – 2.
2°) E est l'image de F par l'homothétie de centre R et de rapport 3.
3°) M' est l'image de M par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

2 Soit ABCD un parallélogramme.
Construire l'image de ABCD par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3 On considère la figure ci-dessous :

Recopier et compléter les phases :
C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport ……….
A est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport ……….
B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport ……….

4 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(3\ ;\ -1)$, $B(9\ ;-5)$ et $C(-6\ ;\ 5)$.
Démontrer qu'il existe une homothétie *h* de centre A telle que $h(B)=C$. Préciser son rapport.

5 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(-3;-2)$.
1°) Traduire par une égalité vectorielle l'affirmation suivante
« B' est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ».
Calculer les coordonnées de B'.
2°) Plus généralement, soit M un point quelconque et M' son image par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
Exprimer les coordonnées de M' en fonction de celles de M.

6 Soit ABC un triangle quelconque et O un point du segment [AC], distinct de A et de C.
Construire le point B' image du point B par l'homothétie *h* de centre O qui transforme A en C à la règle et au compas (sans utiliser le rapport de *h*). Expliquer la construction.

7 Soit ABC un triangle quelconque. On note E et F les points définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
On note I et J les milieux respectifs de [BC] et de [EF].
Démontrer que A, I, J sont alignés en utilisant une homothétie.

8 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la droite *D* d'équation cartésienne $2x-y+3=0$.
On note *h* l'homothétie de centre O et de rapport – 2.
1°) On note A le point d'intersection de *D* et de l'axe des ordonnées.
Calculer les coordonnées de A puis du point $A'=h(A)$.
2°) Déterminer une équation cartésienne de $D'=h(D)$.

9 Soit ABCD un parallélogramme.
On considère les points $E=S_B(A)$, $F=S_D(A)$ et $G=S_{(BD)}(A)$.
Démontrer que les points E, C, G, F sont alignés en utilisant une homothétie.

10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2=4$.
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}'$, image de $\mathcal{C}$ par l'homothétie $h_{(O\ ;\ -3)}$.

11 On considère un parallélogramme ABCD. Soit E un point quelconque de]AC[.
La droite (BE) coupe (AD) en I et (CD) en J. On note *h* l'homothétie de centre E qui transforme A en C.
1°) Déterminer l'image de la droite (AB) par *h* ; en déduire $h(B)$.
2°) Déterminer l'image de la droite (AD) par *h* ; en déduire $h(I)$.
3°) Démontrer que l'on a : $EB^2=EI\times EJ$.
(Noter *k* le rapport de l'homothétie *h*).

12 Soit *D* une droite et A un point n'appartenant pas à *D*.
Pour tout point M de *D*, on note M' le milieu de [AM].
1°) Déterminer une homothétie *h*, indépendante de M, telle que $M'=h(M)$.
2°) En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit *D*.

13 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. On note [AB] un diamètre de $\mathcal{C}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on note G l'isobarycentre des points A, B, M.
1°) Déterminer une homothétie *h*, indépendante de M, telle que $G=h(M)$.
2°) En déduire l'ensemble des points G lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

14 Soit ABC un triangle quelconque. On note D le point défini par $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
On note E le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

15 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on note *f* la transformation qui à tout point $M(x\ ;y)$ associe le point $M'(x'\ ;y')$ tel que $x'=-2x-9$ et $y'=-2y+3$.
1°) Démontrer que *f* admet un unique point invariant I.
On rédigera ainsi :

$$\text{M invariant par } f \Leftrightarrow M'=M$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ldots$$

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$; en déduire la nature de *f*.

Réponses

L'un des objectifs des exercices est de pratiquer le raisonnement par transformation.

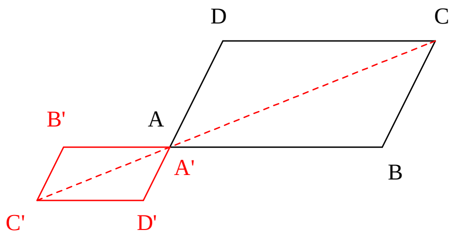
1 1°) $\overrightarrow{IB} = -2\,\overrightarrow{IA}$ 2°) $\overrightarrow{RE} = 3\overrightarrow{RF}$ 3°) $\overrightarrow{IM'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IM}$

2 Figure avec (AB) et (CD) horizontales, A en bas à gauche, B à droite de A.

On note A', B', C', D' les images respectives de A, B, C, D par l'homothétie $h_{\left(A\,;\,-\frac{1}{2}\right)}$.

A' est confondu avec A car A étant le centre de l'homothétie, A est invariant.
Les points B', C', D' sont définis par les égalités vectorielles

$\overrightarrow{AB'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.



On pourra observer que A'B'C'D' est un parallélogramme.

3 C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{9}{2}$ car $\overrightarrow{AC} = \dfrac{9}{2}\overrightarrow{AB}$.

A est l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport $-\dfrac{2}{7}$ car $\overrightarrow{BA} = -\dfrac{2}{7}\overrightarrow{BC}$.

B est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{7}{9}$ car $\overrightarrow{CB} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{CA}$.

4 On peut faire un graphique. Tracer des pointillés et mettre les valeurs des coordonnées sur les axes.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} 6 \\ -4 \end{matrix}\right.$ $\quad\overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix} -9 \\ 6 \end{matrix}\right.$

On a donc $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Par conséquent, $h(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ avec $h = h_{\left(A\,;\,-\frac{3}{2}\right)}$.

5 1°) B' est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport 2 se traduit par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$.
Cette égalité vectorielle se traduit par deux égalités sur les coordonnées (une égalité pour les abscisses, une égalité pour les ordonnées) que l'on écrit en système.

$$\begin{cases} x_{B'} - x_A = 2(x_B - x_A) \\ y_{B'} - y_A = 2(y_B - y_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B'} - 1 = 2(-3-1) \\ y_{B'} - 2 = 2(-2-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B'} - 1 = -8 \\ y_{B'} - 2 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B'} = -7 \\ y_{B'} = -6 \end{cases}$$

B'(–7 ; – 6)

2°) $\mathrm{M'} = h_{(A,\,2)}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_A = 2(x_M - x_A) \\ y_{M'} - y_A = 2(y_M - y_A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - 1 = 2(x_M - 1) \\ y_{M'} - 2 = 2(y_M - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_M - 1 \\ y_{M'} = 2y_M - 2 \end{cases}$$

On dit que ces égalités constituent **l'expression analytique de l'homothétie.**
Ils permettent connaissant les coordonnées d'un point de calculer directement les coordonnées de son image par l'homothétie.
On peut par exemple retrouver les coordonnées de l'image du point B qui ont été déterminées à la question 1°).

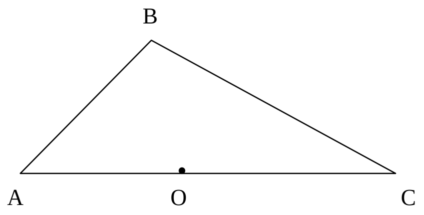
6 Il s'agit d'un exercice de construction à la règle non gradué et au compas.

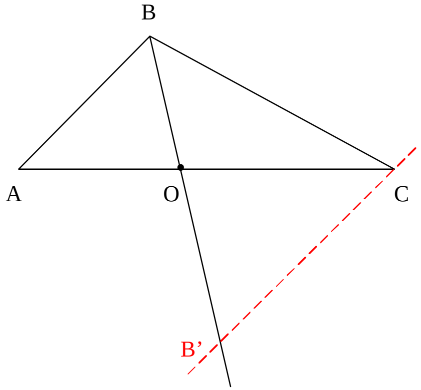
$$\begin{matrix} A & \xmapsto{\ h\ } & C \\ B & \longmapsto & B' \end{matrix}$$

On sait que les points O, B, B' sont alignés.
On sait que (AB) / / (B'C).

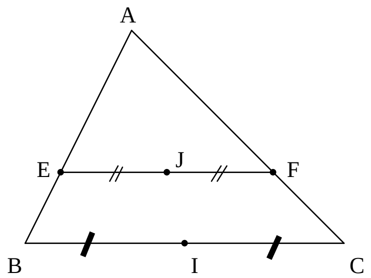
Construction de B' :

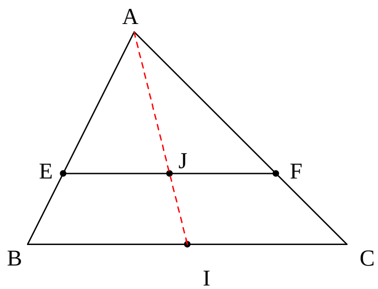
On trace la droite Δ, parallèle à (AB) passant par C.
B' est le point d'intersection de Δ et de la droite (OB).





$\boxed{7}$ Faire une figure codée en prenant (BC) « horizontale » et A « au-dessus » de la droite (BC).
On code les égalités de longueurs des segments [BI] et [IC] d'une part, et des segments [EJ] et [JF] d'autre part.
Ecrire les hypothèses dans un encadré.





$\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc E est l'image de B par l'homothétie $h_{\left(A\,;\,\frac{2}{3}\right)}$.

$\overrightarrow{AF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc F est l'image de C par l'homothétie $h_{\left(A\,;\,\frac{2}{3}\right)}$.

$$\begin{array}{ccc} & h_{\left(A\,;\,\frac{2}{3}\right)} & \\ B & \longmapsto & E \\ C & \longmapsto & F \end{array}$$

I est le milieu de [BC] et J est le milieu de [EF].
Or l'homothétie conserve le milieu donc l'image de I par $h_{\left(A\,;\,\frac{2}{3}\right)}$ est J.

On en déduit que A, I, J (car un point, son image et le centre de l'homothétie sont toujours alignés).

$\boxed{8}$ 1°) $A(0\,;3)$; $A'(0\,;\,-6)$
2°) On utilise que *D* // *D'*.
D' a pour équation cartésienne $2x - y - 6 = 0$.

Solution détaillée :

1°) A ∈ (O*y*) donc $x_A = 0$.
Or A ∈ *D* d'où $2x_A - y_A + 3 = 0$.
Par suite, $y_A = 3$.
On en déduit que A (0 ; 3).

$A' = h(A)$ d'où $\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$.
Par suite,

$$\begin{cases} x_{A'} - x_O = -2(x_A - x_O) \\ y_{A'} - y_O = -2(y_A - y_O) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'} = -2 \times 0 \\ y_{A'} = -2 \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A'} = 0 \\ y_{A'} = -6 \end{cases}$$

2°) On sait que le vecteur $\vec{u}$ (2 ; –1) est un vecteur normal à *D*.
Or l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle d'où *D'* // *D*.

Par conséquent, le vecteur $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à *D'*.
Par suite, *D'* admet une équation cartésienne de la forme $2x - y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

A ∈ *D'* donc $2x_{A'} - y_{A'} + c = 0$
d'où $2 \times 0 - 6 + c = 0$
soit $c = 6$

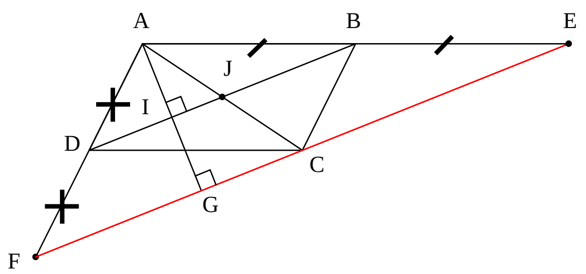
Donc *D'* a pour équation cartésienne $2x - y + 6 = 0$.

$\boxed{9}$ $h = \mathrm{h}_{(\mathrm{A}\,;\,2)}$

Solution détaillée :

On commence par écrire les hypothèses :

ABCD parallélogramme.
$\mathrm{E} = S_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
$\mathrm{F} = S_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$
$\mathrm{G} = S_{(\mathrm{BD})}(\mathrm{A})$



F est le symétrique de A par rapport à D donc $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ d'où $\mathrm{F} = \mathrm{h}_{(\mathrm{A}\,;\,2)}(\mathrm{D})$.

E est le symétrique de A par rapport à B donc $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ d'où $\mathrm{E} = \mathrm{h}_{(\mathrm{A}\,;\,2)}(\mathrm{B})$.

Soit I le point d'intersection de (AG) et (BD).
On peut dire que I est le milieu de [AG] d'où $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ d'où $\mathrm{G} = \mathrm{h}_{(\mathrm{A}\,;\,2)}(\mathrm{I})$.

Soit J le milieu de [AC].
On a donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ d'où $\mathrm{C} = \mathrm{h}_{(\mathrm{A}\,;\,2)}(\mathrm{J})$.

B, D, I et J sont alignés.
Or l'homothétie conserve l'alignement donc F, G, C et E sont alignés.

$\boxed{10}$ Le centre du cercle $\mathcal{C}$ est O donc le centre de $\mathcal{C}$ ' est O (car O est invariant par l'homothétie).
Le rayon de $\mathcal{C}$ est égal à 2 donc le rayon de $\mathcal{C}$ ' est égal à $2 \times |-3| = 6$.
$\mathcal{C}$ ' a donc pour équation $x^2 + y^2 = 36$.

$\boxed{11}$ 1°) $h\big((\mathrm{AB})\big) = (\mathrm{CD})$; $h(\mathrm{B}) = \mathrm{J}$ 2°) $h\big((\mathrm{AD})\big) = (\mathrm{BC})$; $h(\mathrm{I}) = \mathrm{B}$

Solution détaillée :

1°) Déterminons l'image de la droite (AB) par *h*.

L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle. De plus, $h(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.

Donc l'image de (AB) est la droite passant par C, parallèle à (AB).
Or ABCD est un parallélogramme.
Donc (AB) // (CD).
On en déduit que l'image de (AB) par *h* est la droite (CD).

Soit $\mathrm{B}' = h(\mathrm{B})$.
On peut dire que $\mathrm{B}' \in (\mathrm{CD})$ et que $\mathrm{B}' \in (\mathrm{EB})$.
B' est donc le point d'intersection des droites (EB) et (CD).
On en déduit que $\mathrm{B}' = \mathrm{J}$.

2°) Par le même raisonnement qu'au 1°), l'image de la droite (AD) par *h* est la droite (BC) et $h(\mathrm{I}) = \mathrm{B}$.

3°) On a : $\overrightarrow{\mathrm{EJ}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{EB}}$ d'où : $\mathrm{EJ} = |\,k\,| \times \mathrm{EB}$ d'où $|\,k\,| = \dfrac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{EB}}$.

Or : $|\,k\,|\mathrm{EI} = \mathrm{EB}$

Donc $\dfrac{\mathrm{EJ} \times \mathrm{EI}}{\mathrm{EB}} = \mathrm{EB}$.
Par suite, $\mathrm{EB}^2 = \mathrm{EI} \times \mathrm{EJ}$.

$\boxed{12}$ Il s'agit d'un exercice de recherche de lieu géométrique par transformation.

Avant de commencer l'exercice, bien prendre conscience de ce qui est fixe et de ce qui est mobile.

Ce qui est fixe : le point A, la droite *D*.
Ce qui est mobile : le point M, et par suite le point M' (le point M peut être qualifié de point mobile, ou de point variable).

1°) Comme M' est le milieu de [AM], on a : $\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

Cette dernière égalité exprime que M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

On peut donc écrire $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ avec $h = \mathrm{h}_{\left(\mathrm{A}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$.

2°) On peut avoir une idée de l'ensemble des points M' lorsque M décrit *D* en plaçant plusieurs points M sur la droite *D* : M_1, M_2, M_3... On place les points $\mathrm{M'}_1$, $\mathrm{M'}_2$, $\mathrm{M'}_3$… associés.

On peut également utiliser un logiciel de géométrie dynamique tel que *Cabri géomètre* ou *Geogebra*.

$\mathrm{M}' = h(\mathrm{M})$ donc lorsque M décrit D, le point M' décrit $D' = h(D)$.

Construction de la droite *D'* :

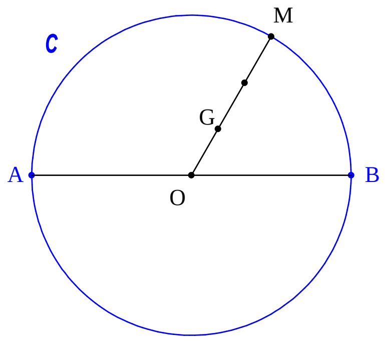
1ère façon (assez simple) :
On place deux points sur *D*, on construit leurs images respectives par *h* et on trace la droite qui les joint.

2e façon (un tout petit peu plus compliquée) :
On place un point sur *D*, on construit son image par *h* et l'on trace la droite passant par ce point et parallèle à *D* (construction de la parallèle avec équerre et règle non graduée ou avec compas et règle non graduée).

$\boxed{13}$ Avant de commencer l'exercice, bien prendre conscience de ce qui est fixe et de ce qui est mobile.

Ce qui est fixe : les points O, A, B et le cercle **C**.
Ce qui est mobile : le point M, et par suite le point G.

1°) On sait que G est l'isobarycentre des points A, B, M donc G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (M ; 1).
Or O est le milieu de [AB] donc O est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 1).
D'après la propriété d'associativité du barycentre, G est le barycentre des points pondérés (O ; 2) et (M ; 1).
D'après l'égalité de position, on a donc $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ d'où $G=h_{\left(O\,;\,\frac{1}{3}\right)}(M)$.



Autre méthode :

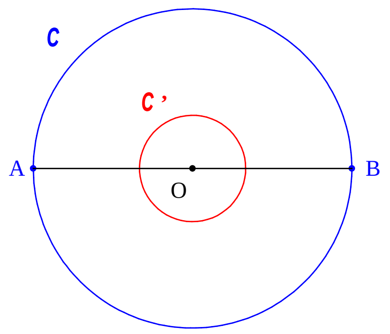
On sait que O est le milieu de [AB] donc la droite (OM) est la médiane issue de M dans le triangle MAB. Or le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet.

On a donc $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$ d'où $G=h_{\left(O\,;\,\frac{1}{3}\right)}(M)$.

$h=h_{\left(O\,;\,\frac{1}{3}\right)}$

2°) Lorsque M décrit **C**, M' décrit **C** ', image de **C** par h (**C** '= h (**C**)).

C ' est le cercle de centre O et de rayon $R'=\frac{1}{3}R$.



Cet exercice se prête bien à une recherche sur un LGD tel que *Geogebra* (démarche d'investigation).
Sur *Geogebra*, on définit le point G, isobarycentre de A, B, M par G= A+B+M/3.
On utilise l'outil trace activée pour visualiser le lieu de G, lorsque M varie sur le cercle **C**.

Ensuite, vient la phase de démonstration.

$\boxed{14}$ On utilise le théorème de Thalès vectoriel.
Il existe un unique réel k tel que : $\overrightarrow{ED}=k\,\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{EC}=k\,\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{CD}=k\,\overrightarrow{BA}$.

Or : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

On en déduit que $k=-\frac{1}{3}$.

Donc $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$ d'où $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$$
$$\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$\boxed{15}$ 1°)

M est invariant par f $\Leftrightarrow M=M'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-9=x \\ -2y+3=y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

Donc f admet un seul point invariant, à savoir le point $I(-3\,;\,1)$.

2°) $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \left| \begin{array}{l} x+3 \\ y-1 \end{array} \right.$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{IM'}} \left| \begin{array}{l} x'+3=-2x-6 \\ y'-1=-2x+2 \end{array} \right.$

On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{IM}'}=-2\,\overrightarrow{\mathrm{IM}}$.

On en déduit que : $f=\mathrm{h}_{(\mathrm{I}\,;\,-2)}$.