1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les limites de suites (2)

1 Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire sous la forme d'une phrase quantifiée la propriété « (u_n) converge vers 2 ».

2 1°) Donner un exemple de suite strictement croissante qui converge vers 1.
2°) Donner un exemple de suite strictement décroissante qui converge vers 1.
3°) Donner un exemple de suite non monotone qui converge vers 1.

3 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

Traduire en termes de limites lorsque c'est possible les propositions suivantes :
1°) tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite pour n assez grand.
2°) l'intervalle $\left]-5,01\,;-4,99\right[$ contient tous les termes d'indice $n \geq 1000$.
3°) tout intervalle de la forme $\left]-\infty\,;\,\text{A}\right]$ (où A est un réel) contient tous les termes de la suite pour n assez grand.

4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]10^8\,;+\infty\right[$.

5 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Déterminer un entier naturel N tel que si $n > N$, alors $u_n \in \left]-10^{-4};10^{-4}\right[$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in \left]-10^{-4};10^{-4}\right[\Leftrightarrow |\,u_n\,| < 10^{-4}$.

6 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.

Déterminer les entiers naturels n tels que $u_n \in [1,99\,;2,01]$.

On pourra utiliser l'équivalence : $u_n \in [1,99\,;2,01] \Leftrightarrow |\,u_n - 2\,| \leq 0,01$.

(Revoir la caractérisation d'un intervalle fermé borné par centre et rayon à l'aide de la valeur absolue).

7 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{3n-1}{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{n+1}$.

On partira de l'encadrement $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{n+1}$.

3°) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

8 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{5n + \sin n}{n}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\dfrac{5n-1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{5n+1}{n}$.

2°) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

9 **Vrai ou faux**

Dire si l'affirmation est **vraie** ou **fausse**. Justifier cette réponse.

1°) Si la suite u est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2°) Si une suite a pour limite $+\infty$, alors cette suite est croissante.
3°) Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. Si, pour tout entier $n \geq 10$, $u_n \geq n^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4°) La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ admet deux limites 1 et -1.
5°) Si, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq \dfrac{1}{n}$, alors la suite u converge vers 0.
6°) Si une suite u converge vers une limite réelle L, tous les termes u_n, à partir d'un certain rang, sont dans l'intervalle $\left]\text{L}-0,1\,;\,\text{L}+0,1\right[$.
7°) Si une suite convergente vers L a tous ses termes strictement positifs, alors L > 0.
8°) Si deux suites u et v convergent et si, pour tout entier naturel n, $v_n \neq 0$, alors la suite $\dfrac{u}{v}$ converge.
9°) Si u converge vers 0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors la suite uv converge vers 0.
10°) Si, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $2 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$, alors la limite de la suite u est 2.

Réponses

7 1°) On précède par encadrements successifs. 2°) 3 3°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ (théorème des gendarmes)

8 1°) Partir de $-1 \leq \sin n \leq 1$ 2°) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$ (théorème des gendarmes)

9 **Vrai ou faux ?**

1°) F (un contre-exemple est fourni par la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -\dfrac{1}{n}$)

2°) F (un contre-exemple est fourni par la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$)

3°) V

4°) F (unicité de la limite)

5°) F (un contre-exemple est fourni par la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -1$)

6°) V

7°) F ($u_n = \dfrac{1}{n}$)

8°) F (un contre-exemple est fourni par les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1$ et $v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$)

9°) F (forme indéterminée)

10°) V (théorème des gendarmes)