$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les formules d'addition et de duplication

1 Soit x un réel quelconque.

Développer $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$.

2 Soit x un réel quelconque. Réduire les expressions suivantes :
$A=\cos 3x\cos 5x+\sin 3x\sin 5x$; $B=\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x$
$C=\cos 7x\sin 6x-\sin 7x\cos 6x$; $D=\cos 3x\sin 2x+\cos 2x\sin 3x$.

3 Soit x un réel qui n'est pas un multiple entier de $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'expression $A=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

4 Soit x un réel quelconque. Calculer les expressions :
$A=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ et $B=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

5 Soit x un réel tel que $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer cosi $\cos 2x$.

6 On note a le réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos a=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
Calculer $\cos 2a$; en déduire la valeur de a.

7 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités :

1°) $1+2\cos x+\cos 2x=2\cos x(1+\cos x)$

2°) $1+2\sin x-\cos 2x=2\sin x(1+\sin x)$.

8 Donner une factorisation des expressions $A=1-\cos 2x+\sin x$ et $B=1-\cos 2x+\sin 2x$.

9 Soit x un réel quelconque. Démontrer les égalités suivantes :

1°) $(\cos x-\sin x)^2=1-\sin 2x$

2°) $4\cos^2x+2\sin^2x=3+\cos 2x$

3°) $\cos^4x-\sin^4x=\cos 2x$.

10 Soit x un réel quelconque qui n'est pas un multiple entier de $\dfrac{\pi}{2}$.

1°) Simplifier $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

2°) A l'aide du 1°), calculer $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

11 Soit x un réel quelconque.

Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos 2x$; en déduire $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

12 Soit x un réel quelconque.

En écrivant $3x=2x+x$, exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

Réponses

1 On utilise les formules d'addition du cosinus et du sinus.

On utilise les valeurs de cosinus et de sinus de valeurs remarquables
($\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

2 $A=\cos 2x$; $B=\cos 3x$; $C=-\sin x$; $D=\sin 5x$

3 $A=2$ (on utilise la formule $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-bc}{bd}$)

4 $A=B=0$

Méthode :

On développe les expressions avec les formules d'addition et on utilise :

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$; $\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les lignes trigonométriques de $\dfrac{4\pi}{3}$ se lisent directement sur le cercle trigonométrique.

On peut aussi écrire :

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}$$

5 $\cos 2x=-\dfrac{1}{3}$

6 $\cos 2a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $a=\dfrac{\pi}{12}$ (il faut justifier précisément avec l'intervalle) **7** **8** $A=\sin x(2\sin x+1)$;
$B=2\sin x(\sin x+\cos x)$

9 2°) On change l'expression du 1$^{\text{er}}$ membre ; on change l'expression du second membre et on montre que les deux expressions sont égales.

On exprime toutes les deux en fonctions de $\cos^2 x$.

$$4\cos^2x+2\sin^2x=4\cos^2x+2\left(1-\cos^2x\right)=2\cos^2x+2$$
$$3+\cos 2x=3+2\cos^2x-1=2+2\cos^2x$$

3°) $\cos^4x-\sin^4x=\left(\underbrace{\cos^2x+\sin^2x}_{1}\right)\left(\cos^2x-\sin^2x\right)=\cos^2x-\sin^2x=\cos 2x$.

Attention à ne pas compliquer inutilement.

Exemple de complication inutile :

$\cos^2 x-\sin^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{2\cos 2x}{2}=\cos 2x$

On directement la formule qui nous donne $\cos 2x$.

$\boxed{\textbf{10}}$ 1°) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\tan x$ 2°) $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$; $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

$\boxed{\textbf{11}}$ $\cos 4x=2\cos^2(2x)-1=2\left[\cos(2x)\right]^2-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1=...=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

On a bien exprimé $\cos 4x$ en fonction de $\cos 2x$ (même si en fait, on a exprimé $\cos 4x$ en fonction de $\cos^2 2x$).

Méthode du changement de variable : $X=2x$.

$\cos(2X)=2\cos^2 X-1$

$\boxed{\textbf{12}}$ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

Il est conseillé de retenir ces formules. Grâce à elles, on peut retrouver le résultat de l'exercice $\boxed{\textbf{2}}$.

$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=...=4\cos^3 x-3\cos x$

Ecrire $\sin 2x=2\sin x\cos x$ puis $\sin^2 x=1-\cos^2 x$.

Solutions détaillées

$\boxed{7}$ **Démonstrations d'égalités**

Méthode (pour l'exercice présent) :

Partir du membre de gauche pour arriver au membre de droite.
Il est assez pratique de donner un nom au membre de gauche (A, B …).

$\boxed{\textbf{10}}$ 1°) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2 x\right)}{2\sin x\times\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\tan x$

2°)

Calculons $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

On applique l'égalité du 1°) pour $x=\dfrac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{8}&=\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}\\&=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\&=\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\&=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\&=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}\\&=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\\&=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

Calculons $\tan\frac{\pi}{12}$.

On applique l'égalité du 1°) pour $x=\frac{\pi}{12}$.

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}$$
$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{1}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

$\boxed{11}$ Expression de cos 4*x* en fonction de cos *x*.

Exprimons cos 4*x* en fonction de cos 2*x*.

Méthode du changement de variable : $X=2x$.

$$\cos(2X)=2\cos^2 X-1$$

$$\cos 4x=\cos(2\times 2x)$$
$$=2\cos^2(2x)-1$$
$$=2\left[\cos(2x)\right]^2-1$$

On a bien exprimé cos 4*x* en fonction de cos 2*x* (même si en fait, on a exprimé cos 4*x* en fonction de $\cos^2 2x$).

Déduisons-en cos 4*x* en fonction de cos *x*.

$$\cos 4x=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$$
$$=2\left(4\cos^2 x-4\cos^2 x+1\right)-1$$
$$=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

$\boxed{12}$ **Expressions de cos 3*x* en fonction de cos *x* et sin 3*x* en fonction de sin *x*.**

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$; $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

Il est conseillé de retenir ces formules. Grâce à elles, on peut retrouver le résultat de l'exercice $\boxed{2}$.

$\cos 3x=\cos(2x+x)$ (astuce de départ)

$=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$ (formule d'addition du cosinus)

$=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x-2\sin x\cos x\times\sin x$ (formule de duplication du cosinus et du sinus)

$=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x-2\cos x\times\sin^2 x$

$=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x-2\cos x\times\left(1-\cos^2 x\right)$ (on utilise la formule $\cos^2 x+\sin^2 x=1$)

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

$\sin 3x=\sin(2x+x)$ (astuce de départ)

$=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$ (formule d'addition du sinus)

$=2\sin x\cos x\times\cos x+\left(1-2\sin^2 x\right)\times\sin x$ (formule de duplication du cosinus et du sinus)

$=2\sin x\times\cos^2 x+\sin x-2\sin^3 x$ (on développe)

$=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x-2\sin^3 x$ (on utilise la formule $\cos^2 x+\sin^2 x=1$)

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x$

$=3\sin x-4\sin^3 x$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$