1$^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les limites de suites (1)

1 Soit u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Dans chacun des cas suivants, donner la limite de la suite u.

1°) $u_0 = 3$; $q = \sqrt{2}$ 2°) $u_0 = -1$; $q = \sqrt{3}$ 3°) $u_0 = \dfrac{5}{2}$; $q = \dfrac{1}{5}$

4°) $u_0 = 6$; $q = -\dfrac{1}{2}$ 5°) $u_0 = -\dfrac{1}{3}$; $q = 3$ 6°) $u_0 = -2$; $q = 0{,}9$.

2 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n}$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que l'on rencontre une forme indéterminée.

2°) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

b) Quelle est la limite de la suite u ?

3 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{4^n - 3}{5^n + 1}$. Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite u.

1°) Démontrer que l'on rencontre une forme indéterminée.

2°) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times \dfrac{1 - 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$.

b) Quelle est la limite de la suite u ?

4 Soit u la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

1°) Exprimer S_n en fonction de n.

2°) Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

5 1°) Pour chacune des propositions suivantes, répondre sans justification par **vrai** ou **faux**.

a) Toute suite strictement décroissante a pour limite $-\infty$.

b) Pour toutes suites u et v à termes strictement positifs qui ont pour limite $+\infty$, la suite $\dfrac{u}{v}$ converge vers 1.

c) Pour tout réel $q > 0$, la suite $\left(q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.

d) Il existe des suites qui n'ont pas de limite.

2°) Pour chacune des propositions de la question 1°), justifier la réponse donnée :

- dans le cas où la proposition paraît fausse, en donnant un contre-exemple ;
- dans le cas où la proposition paraît exacte, en donnant une démonstration.

6 Soit u une suite. Dire si chacune des propositions suivantes est **vraie** ou **fausse** et justifier la réponse.

1°) Si u converge, alors u^2 converge.

2°) Si u^2 converge, alors u converge.

Réponses

1 1°) $+\infty$ 2°) $-\infty$ 3°) 0 4°) 0 5°) $-\infty$ 6°) 0

2 1°) On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » 2°) b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

3 1°) On rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » 2°) b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

4 1°) $S_n = \dfrac{4}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$ 2°) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{4}{3}$

5 1°) a) F ; b) F ; c) F ; d) V

2°) a) On donne un contre-exemple.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

La suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

b) On donne un contre-exemple.

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

Les suites (u_n) et (v_n) divergent toutes les deux vers $+\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{n^2}{n} = n$

La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

c) On donne un contre-exemple.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite (u_n) converge vers 0 car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ (cours sur la limite d'une suite géométrique).

d) On donne un exemple.

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

6 1°) V (opérations algébriques sur les suites convergentes ; si u converge vers l, alors $u^2 = u \times u$ converge vers l^2) 2°) F (un contre-exemple est fourni par la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$)

Solutions détaillées

$\boxed{1}$ **Thème de l'exercice : déterminer la limite d'une suite géométrique**

1°) On peut dire que $u_n = 3\times\left(\sqrt{2}\right)^n$.

$\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2°) On peut dire que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = -1\times\left(\sqrt{3}\right)^n = -\left(\sqrt{3}\right)^n$.

$\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3°) On peut dire que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = \frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

$-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4°) On peut dire que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5°) On peut dire que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = -\frac{1}{3}\times 3^n$.

$3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

6°) On peut dire que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = -2\times(0{,}9)^n$.

$-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}9)^n = 0$ (règle du cours).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = \frac{2^n+1}{3^n}$

1°) Démontrons que l'on rencontre une forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n+1\right) = +\infty \ \text{ car } 2>1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3^n\right) = +\infty \ \text{ car } 3>1\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

2°) a) Vérifions que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n &= \frac{2^n+1}{3^n}\\ &= \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

b) Déterminons la limite de la suite u.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \ \text{ car } -1<\frac{2}{3}<1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \ \text{ car } -1<\frac{1}{3}<1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{3}$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n = \frac{4^n-3}{5^n+1}$

1°) Démontrons que l'on rencontre une forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4^n-3\right) = +\infty \ \text{ car } 4>1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(5^n+1\right) = +\infty \ \text{ car } 5>1\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

2°) a) Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N} \; u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4^n\left(1-\frac{3}{4^n}\right)}{5^n\left(1+\frac{1}{5^n}\right)}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{1-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

b) Déterminons la limite de la suite *u*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \;\text{ car }\; -1<\frac{4}{5}<1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right] = \frac{1-0}{1+0} = 1 \;\text{ car }\; -1<\frac{1}{4}<1 \;\text{ et }\; -1<\frac{1}{5}<1 \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un produit, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

On peut dire en utilisant le vocabulaire du cours que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{4}$ *u* : suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

1°) Exprimons S_n en fonction de *n*.

D'après la formule sommatoire donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique,

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$= u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 2\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}$$

$$= 2\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

2°) Etudions la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \;\text{ car }\; -1<-\frac{1}{2}<1$$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}$.