$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur le plan muni d'un repère orthonormé

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 On donne les points A(2 ; 2), B(– 3 ; – 3) et C(2 ; – 3). On note H le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses et K le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Démontrer que (OC) ⊥ (HK).

2 On note *D* et *D*' les droites d'équations réduites respectives $y = \frac{3}{2}x + 3$ et $y = -2x + 10$.
La droite *D* coupe l'axe des ordonnées en B, *D*' coupe l'axe des abscisses en C et *D* et *D*' se coupent en A.
Faire une figure.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

3 On donne les points $A\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ et C(3 ; 3). La droite *D* passant par C et perpendiculaire à (AB) coupe l'axe des abscisses en I. Faire une figure.
Calculer l'abscisse de I.

4 On donne les points les points $A\left(-\frac{7}{2} ; 2\right)$, $B(-2 ; 5)$, $C\left(5 ; \frac{13}{2}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.
Pour la figure, prendre le centimètre pour unités graphique.

1°) Démontrer que ABCD est un trapèze rectangle.
2°) Calculer son aire.

5 On considère les vecteurs $\vec{u}(4 ; -3)$ et $\vec{v}(-5 ; 12)$.
Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

6 On considère les points les points A(1 ; 2), B(– 3 ; 0), $C\left(-1-\sqrt{3} ; 1+2\sqrt{3}\right)$.
Calculer AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

7 On considère la droite *D* d'équation cartésienne $3x - 5y + 1 = 0$ ainsi que les points A(6 ; – 8) et B(0 ; 2).
Démontrer que $D \perp (AB)$.

8 Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation cartésienne $(m+1)x - (3m-1)y + m - 4 = 0$.
On donne les points A(6 ; – 8) et B(0 ; 2).
1°) Déterminer *m* tel que $D_m \perp (AB)$.
2°) Déterminer *m* tel que $D_m // (AB)$.

9 On considère les points A(3 ; – 2) et B(5 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en rédigeant.

10 On considère les points A(– 3 ; – 2), B(4 ; 5) et C(– 1 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB).

11 On considère les points A(– 1 ; – 1), B(6 ; 1) et C(3 ; 3).
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par C.

12 On considère les points $A(4 ; 1)$ et B(0 ; 5). On rappelle que O est l'origine du repère.
On note Δ la hauteur issue de A et Δ' la hauteur issue de B dans le triangle OAB.
1°) Déterminer une équation cartésienne de Δ et Δ'.
2°) En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle OAB.

13 Déterminer une équation cartésienne sous forme développée du cercle $\mathcal{C}$ dans chacun des cas suivants.
1°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(1 ; – 3) et de rayon 2.
2°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 1 ; 1) passant par O.
3°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 1 ; 1) et passant par le point B(3 ; 2).
4°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(3 ; 2) et tangent à l'axe des ordonnées.
5°) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A(– 2 ; – 3) et tangent à l'axe des abscisses.
6°) $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB] avec A(0 ; 1) et B(3 ; 0).

14 Déterminer la nature des ensembles suivants définis par une équation cartésienne.
$E_1 : x^2 + y^2 - 3x - 4y = -4$; $E_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$; $E_3 : x^2 + y^2 - 2x - 2y = -2$.

15 1°) Construire le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$.
2°) Ce cercle coupe l'axe des abscisses en A et B et l'axe des ordonnées en C et D. Déterminer les coordonnées des ces quatre points.
On conclura ainsi :
$\mathcal{C} \cap (Ox) = \{A ; B\}$ avec A(........;........) et B(........;........).
$\mathcal{C} \cap (Oy) = \{C ; D\}$ avec C(........;........) et D(........;........).

16 1°) Construire le cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 7 = 0$ et la droite *D* d'équation cartésienne $x - y + 3 = 0$.
2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D*.
$\mathcal{C} \cap D = \{A ; B\}$ avec A(........;........) et B(........;........).

17 On considère les points I(3 ; 2) et A(1 ; 5).
1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A.
2°) On note Δ la tangente à $\mathcal{C}$ en A (perpendiculaire au rayon [IA] passant par A).
Déterminer une équation cartésienne de Δ.

18 On note $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 2y + m = 0$ où *m* est un réel donné.
Déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de *m*.

19 Soit *D* et *D*' les droites d'équations respectives $y = mx + 1$ et $y = -4mx + 3$ où *m* est un réel donné.
Déterminer les valeurs de *m* telles que *D* ⊥ *D*'.

Réponses

1 H(–3 ; 0) et K(0 ; 2).

On calcule $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{HK} = 0$. On en déduit que (OC) ⊥ (HK).

2 $A(2\ ;6)\ ;\ B(0\ ;3)\ ;\ C(5\ ;0)$

$\overrightarrow{AB}(-2\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;-6)$

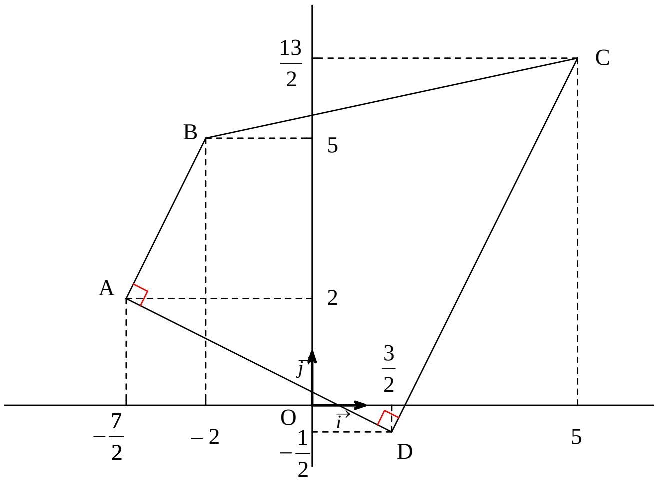
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 12$

$AB = \sqrt{13}\ ;\ \ AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \ldots = \dfrac{4}{\sqrt{65}}\ ;\ \widehat{BAC} \approx 60{,}3°$ (valeur arrondie au dixième)

3 $x_I = \dfrac{3}{4}$

4 Faire une figure. Tracer des pointillés (à la règle) avec les coordonnées des points sur les axes.



1°) $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = \ldots = \dfrac{3}{2} \\ y_B - y_A = \ldots = 3 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{AD}\left|\begin{array}{l} x_D - x_A = \ldots = 5 \\ y_D - y_A = \ldots = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$; $\overrightarrow{DC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_D = \ldots = -\dfrac{7}{2} \\ y_C - y_D = \ldots = -7 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AD}} = \ldots = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{DC} = x_{\overrightarrow{AD}} \times x_{\overrightarrow{DC}} + y_{\overrightarrow{AD}} \times y_{\overrightarrow{DC}} = \ldots = 0$ donc $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$.

Lorsque l'on doit démontrer que l'on a un trapèze rectangle, il suffit de démontrer qu'il y a deux angles droits (il est inutile de démontrer qu'il y a deux côtés parallèles puisque cela découle des deux angles droits).

On en déduit que ABCD est un trapèze rectangle en A et D.

2°) On applique la formule de l'aire d'un trapèze (convexe ou non croisé, c'est la même chose) :

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \dfrac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la longueur de la petite base, B est la longueur de la grande base et h la hauteur.

Ici : $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ABCD} = \dfrac{(AB + DC)\times AD}{2}$

On calcule les longueurs AB, DC et AD (ce sont les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ dont on a calculé les coordonnées à la question 1°).

$AB = \dfrac{3}{2}\sqrt{5}\ ;\ \ AD = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}\ ;\ \ DC = \dfrac{7}{2}\sqrt{5}$.

On trouve $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ABCD} = \dfrac{125}{4}$ u.a.

(u.a. : unité d'aire c'est-à-dire aire du carré construit sur les vecteurs de base)

5 $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 13$, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{82}$, $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 3\sqrt{34}$.

6 On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} -4 \\ -2 \end{array}\right.$; $\overrightarrow{BC}\left|\begin{array}{l} 2-\sqrt{3} \\ 1+2\sqrt{3} \end{array}\right.$; $\overrightarrow{CA}\left|\begin{array}{l} -2-\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{3} \end{array}\right.$

On calcule leurs normes au carré (évite d'avoir à passer par des racines carrées).

$AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$

$AB = BC = CA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ donc ABC est un triangle équilatéral.

7 **Attention : il n'est pas du tout utile de chercher une équation de la droite (AB).**

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(-6\,;10)$.

On sait que le vecteur $\vec{u}(3\,;-5)$ est un vecteur normal à D.

On observe que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$.

Faire une figure avec les points A et B ainsi que la droite D (on met l'équation cartésienne sous forme d'équation réduite $y = \dfrac{3x+1}{5}$; la droite D passe par les points de coordonnées (–2 ; – 1) et (3 ; 2)).

Tracer un représentant de $\vec{u}$ (permet de visualiser un vecteur normal à D).

N.B. : on peut aussi utiliser un vecteur directeur de D.

$\boxed{8}$ 1°) $m=2$ 2°) $m=\dfrac{1}{9}$

Le vecteur $\vec{u}(m+1\,;-3m+1)$ est un vecteur normal à D_m.

Solution détaillée :

On sait que le vecteur $\vec{u}(3m-1\,;\,m+1)$ est un vecteur directeur de D_m et que le vecteur $\vec{v}(m+1\,;1-3m)$ est un vecteur normal à D_m.

$$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B-x_A=0-6=-6 \\ y_B-y_A=2+8=10 \end{array}\right.$$

Attention : une grosse perte de temps consisterait à chercher une équation de (AB).

1°)

$$\begin{aligned} D_m\perp(AB) &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\overrightarrow{AB}=0 \\ &\Leftrightarrow x_{\vec{u}}\times x_{\overrightarrow{AB}}+y_{\vec{u}}\times y_{\overrightarrow{AB}}=0 \\ &\Leftrightarrow (3m-1)\times(-6)+(m+1)\times10=0 \\ &\Leftrightarrow -18m+6++10m+10=0 \\ &\Leftrightarrow -8m+16=0 \\ &\Leftrightarrow m=2 \end{aligned}$$

2°)

$$\begin{aligned} D_m\,//\,(AB) &\Leftrightarrow \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \vec{v}\bullet\overrightarrow{AB}=0 \\ &\Leftrightarrow x_{\vec{v}}\times x_{\overrightarrow{AB}}+y_{\vec{v}}\times y_{\overrightarrow{AB}}=0 \\ &\Leftrightarrow (m+1)\times(-6)+(1-3m)\times10=0 \\ &\Leftrightarrow -6m-6+10-30m=0 \\ &\Leftrightarrow -36m+4=0 \\ &\Leftrightarrow m=\frac{-4}{-36} \\ &\Leftrightarrow m=\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ $\overrightarrow{AM}\left|\begin{array}{l} x-3 \\ y+2 \end{array}\right.$ $\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} M\in(AB) &\text{ si et seulement si } 4(x-3)-2(y+2)=0 \\ &\text{ si et seulement si } 2(x-3)-(y+2)=0 \\ &\text{ si et seulement si } 2x-y-8=0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) s'écrit : $2x-y-8=0$.

Autre méthode :

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array}\right.$ est un vecteur directeur de (AB) donc (AB) admet une équation cartésienne de la forme $4x-2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Or A $\in$ (AB) donc $4x_A-2y_A+c=0$ d'où $c=-16$.

(AB) admet pour équation cartésienne $4x-2y-16=0$.
En simplifiant par 2, on obtient $2x-y-8=0$.

N.B. : Il faut simplifier l'équation cartésienne que l'on obtient quand on peut.

$\boxed{10}$ Une équation cartésienne de Δ s'écrit $-x+y-3=0$.

$\boxed{11}$ Faire un figure en plaçant les trois points A, B, C ; la droite (AB) et la droite Δ.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}(7\,;2)$.

1$^{\text{ère}}$ méthode :

Soit M(x, y) un point du plan.

$$\overrightarrow{CM}\left|\begin{array}{l} x-3 \\ y-3 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} M\in\Delta &\text{ si et seulement si } \overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{AB} \\ &\text{ si et seulement si } \overrightarrow{CM}\bullet\overrightarrow{AB}=0 \\ &\text{ si et seulement si } 7(x-3)+2(y-3)=0 \\ &\text{ si et seulement si } 7x+2y-27=0 \end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ méthode :

Comme $\Delta\perp$ (AB), on peut dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ.
Donc Δ admet une équation cartésienne de la forme $7x+2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Or C $\in$ D donc $7x_C+2y_C+c=0$ d'où $c=-27$.

Δ : $7x+2y-27=0$

Conseil : surtout ne pas chercher une équation de la droite (AB) (car c'est inutile).

$\boxed{12}$ 1°)

Δ est la hauteur la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
Donc Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (OB).
Or B $\in$ (Oy) donc la droite (OB) est confondue avec (Oy).

Par suite, $\Delta\perp$ (Oy).
Or (Oy) $\perp$ (Ox) car le repère est orthonormé d'où Δ // (Ox).
Comme A $\in\Delta$, on en déduit que Δ a pour équation $y=1$.

$\Delta : y=1$
Δ' : $-4x-y+5=0$
2°) H est l'orthocentre du triangle OAB donc H est le point de concours des trois hauteurs du triangle OAB.
Par conséquent H est le point d'intersection de Δ et Δ'.

$H(1\,;1)$

$\boxed{13}$ 1°) **C** : $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

2°) On commence par calculer la distance OA.

C : $x^2+y^2+2x-2y=0$

3°) On commence par calculer la distance AB.

C : $x^2+y^2+2x-2y-15=0$

4°) **C** est tangent à l'axe des ordonnées au point H(0 ; 2).
Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Le rayon du cercle est égal à HA = 3 (on peut donner cette distance directement sans faire aucun calcul).

C : $x^2+y^2-6x-4y+4=0$

5°) Le cercle **C** a pour rayon 3.

C : $x^2+y^2+4x+6y+4=0$

6°) On utilise la formule donnant une équation de cercle pour un diamètre.

C : $x^2+y^2-3x-y=0$.

$\boxed{14}$ L'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$; $E_2=\varnothing$; $E_3=\{\ \Omega\ \}$ avec $\Omega(1;1)$.

$\boxed{15}$ 1°) Le cercle **C** a pour centre Ω (1 ; 1) et pour rayon $\sqrt{10}$.
La construction d'un segment de longueur $\sqrt{10}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $10=3^2+1^2$ ($\sqrt{10}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 3 et 1).

2°) $\mathrm{A}(-2\ ;\ 0)$; $\mathrm{B}(4\ ;\ 0)$; $\mathrm{C}(0\ ;\ -2)$; $\mathrm{D}(0\ ;\ 4)$

$\boxed{16}$ 2°) **C** $\cap D=\{\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{B}\}$ avec $\mathrm{A}(-1\ ;\ 2)$ et $\mathrm{B}(2\ ;\ 5)$

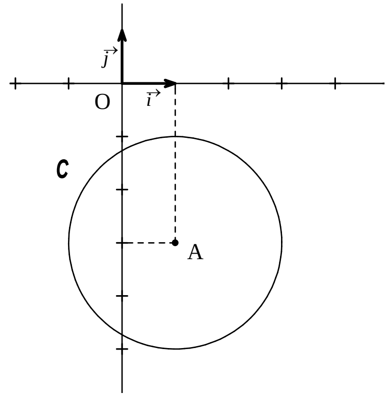
$\boxed{17}$ 1°) $x^2+y^2-6x-4y=0$; 2°) $2x-3y+13=0$

$\boxed{18}$ Mettre l'équation sous forme canonique.

Solutions détaillées

$\boxed{13}$ **Equations de cercles**

1°) **C** : cercle de centre $\mathrm{A}(1\ ;\ -3)$ et de rayon 2.



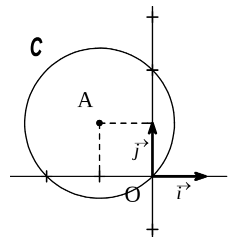
Le cercle **C** a pour équation $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ soit $x^2+y^2-2x+6y+6=0$.

2°) **C** : cercle de centre $\mathrm{A}(-1\ ;\ 1)$ passant par O.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$ donc $\mathrm{OA}^2=(-1)^2+1^2=2$

Le cercle **C** a pour équation $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de **C** s'écrit $x^2+y^2+2x-2y=0$.

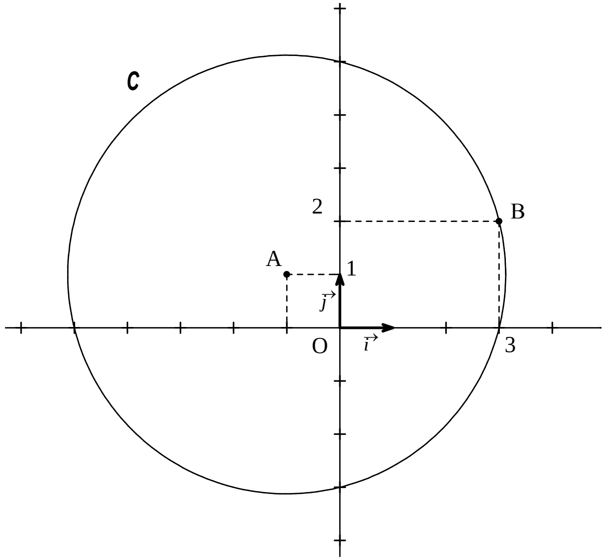


3°) **C** : cercle de centre $\mathrm{A}(-1\ ;\ 1)$ et passant par le point B(3 ; 2).

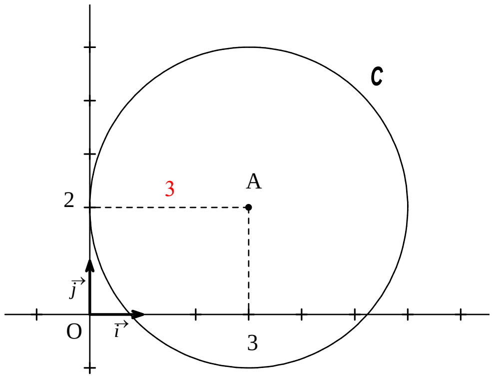
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l}4\\1\end{array}\right.$ donc $\mathrm{AB}^2=4^2+1^2=17$

Le cercle **C** a pour équation $(x+1)^2+(y-1)^2=17$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2+y^2+2x-2y-15=0$.



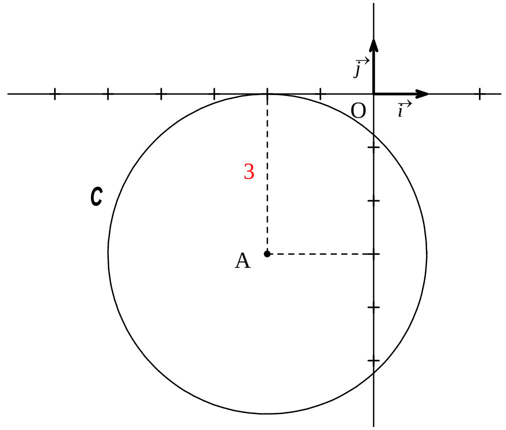
4°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $A(3\ ;\ 2)$ et tangent à l'axe des ordonnées.



$\mathcal{C}$ est tangent à l'axe des ordonnées au point H(0 ; 2).
Le point H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées.
Le rayon du cercle est égal à HA = 3 (on peut donner cette distance directement sans faire aucun calcul).

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-3)^2+(y-2)^2=3^2$ soit $x^2+y^2-6x-4y+4=0$.

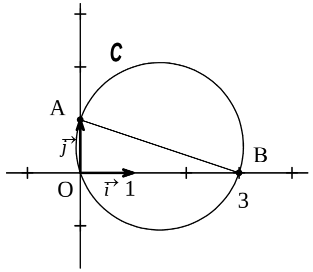
5°) $\mathcal{C}$: cercle de centre $A(-2\ ;\ -3)$ et tangent à l'axe des abscisses.



Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à 3.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x+2)^2+(y+3)^2=3^2$ soit $x^2+y^2+4x+6y+4=0$.

6°) $\mathcal{C}$: cercle de diamètre [AB] avec $A(0\ ;\ 1)$ et B(3 ; 0).



On utilise la formule donnant une équation de cercle pour un diamètre.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x-0)(x-3)+(y-1)(y-0)=0$ soit $x^2+y^2-3x-y=0$.

14 **Reconnaissance d'ensembles définis par une équation.**

$\boxed{E_1 : x^2+y^2-3x-4y=-4}$

L'équation $x^2+y^2-3x-4y=-4$ est successivement équivalente à :

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y-2)^2-4=-4$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{9}{4}$$

Donc l'ensemble E_1 est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{E_2 : x^2+y^2-2x-4y+7=0}$

L'équation $x^2+y^2-2x-4y+7=0$ est successivement équivalente à :

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4+7=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2=-2$

Donc <u>l'ensemble E_2 est l'ensemble vide</u>.

$E_2=\varnothing$

$\boxed{E_3 : x^2+y^2-2x-2y=-2}$

L'équation $x^2+y^2-2x-2y=-2$ est successivement équivalente à :

$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1=-2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=0$

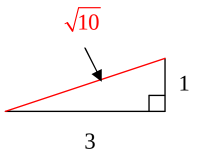
Donc <u>l'ensemble E_3 est le singleton $\{\Omega\}$ avec Ω (1 ; 1)</u>.

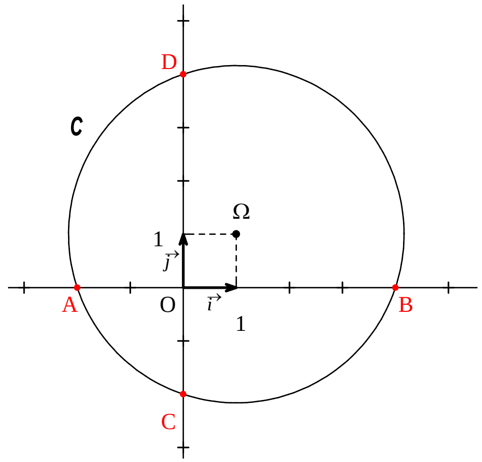
$E_3=\{\Omega\}$

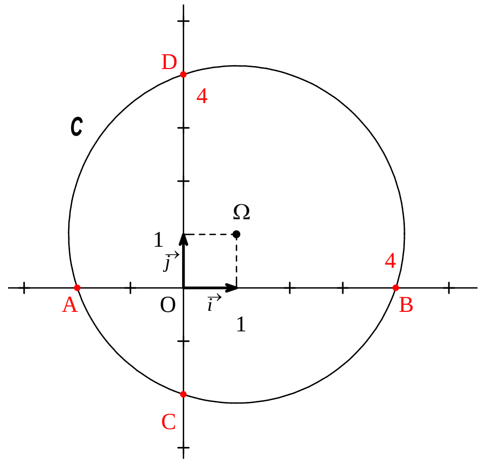
15 1°) L'équation $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ est équivalente à $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω (1 ; 1) et de rayon $\sqrt{10}$.

La construction d'un segment de longueur $\sqrt{10}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $10=3^2+1^2$ ($\sqrt{10}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 3 et 1).







2°) Coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

<u>Déterminons les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.</u>

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses sont solutions de l'équation $x^2-2x-8=0$.

Les racines de cette équation sont – 2 (racine évidente) et 4 (obtenu par produit).

On en déduit que $\mathcal{C}\cap(\mathrm{O}x)=\{\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{B}\}$ avec $\mathrm{A}(-2\ ;\ 0)$ et B(4 ; 0).

Déterminons les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées.

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées sont solutions de l'équation $y^2-2y-8=0$.

On retrouve la même équation que lorsque l'on a déterminé les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
On en déduit que $\mathcal{C}\cap(\mathrm{O}y)=\{\mathrm{C}\ ;\ \mathrm{D}\}$ avec $\mathrm{C}(0\ ;\ -2)$ et $\mathrm{D}(0\ ;4)$.

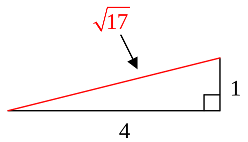
$\boxed{16}$ $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-2y-7=0$; D : $x-y+3=0$.

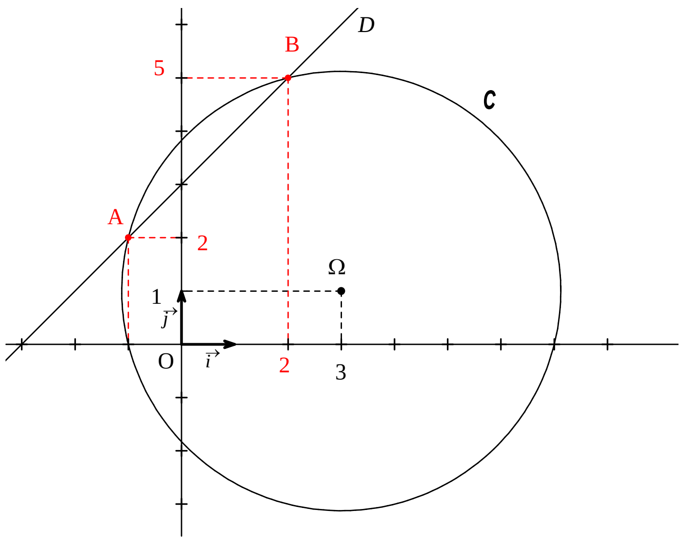
1°) L'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ donnée dans l'énoncé s'écrit aussi $(x-3)^2+(y-1)^2=17$.
On en déduit que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω (3 ; 1) et de rayon $\sqrt{17}$.

La construction d'un segment de longueur $\sqrt{17}$ se fait aisément grâce au théorème de Pythagore car $17=4^2+1^2$ ($\sqrt{17}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 4 et 1).

D : $y=x+3$

x	0	4
y	3	7





2°) Déterminons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

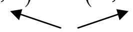
Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont solutions de l'équation $(x-3)^2+(x+3-1)^2=17$ (1).

L'équation (1) est successivement équivalente à
$(x-3)^2+(x+2)^2=17$
$2x^2-2x+13=17$
$2x^2-2x-4=0$
$x^2-x-2=0$

Les solutions de cette équation sont – 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

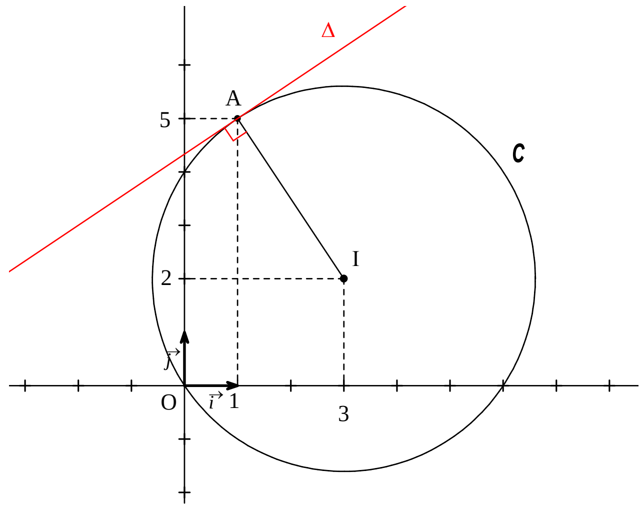
Conclusion :

$\mathcal{C}\cap D=\{\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{B}\}$ avec $\mathrm{A}(-1\ ;2)$ et $\mathrm{B}(2\ ;5)$.



On calcule les ordonnées des points A et B grâce à l'équation réduite de la droite *D*.

$\boxed{17}$ **Figure :**



1°) $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\left|\begin{array}{l}-2\\3\end{array}\right.$ donc $\mathrm{IA}^2=(-2)^2+3^2=13$

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A a pour équation $(x-3)^2+(y-2)^2=13$.
On développe cette équation.

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $x^2+y^2-6x-4y=0$.

2°) La droite Δ est la perpendiculaire à la droite (IA) passant par A.

$\mathrm{M}(x\,;\,y)\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

si et seulement si $(x-1)\times(-2)+(y-5)\times 3=0$

si et seulement si $-2x+3y-13=0$

si et seulement si $2x-3y+13=0$

Δ a pour équation cartésienne $2x-3y+13=0$.

18 $\mathcal{C}_m$: $x^2+y^2+4x+2y+m=0$ ($m\in\mathbb{R}$)

Déterminons la nature de $\mathcal{C}_m$ suivant les valeurs de m.

L'équation $x^2+y^2+4x+2y+m=0$ est successivement équivalente aux équations suivantes :

$(x+2)^2+(y+1)^2+m-4-1=0$

$(x+2)^2+(y+1)^2=m-5$

On effectue une **discussion** par rapport au signe de $m-5$.

1er cas : $m>5$

Dans ce cas, $m-5>0$.

$\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre de centre Ω (– 2 ; – 1) et pour rayon $\sqrt{m-5}$.

2e cas : $m=5$

$\mathcal{C}_5$ a pour équation $(x+2)^2+(y+1)^2=0$.

$\mathcal{C}_5$ est le singleton $\{\Omega\}$ avec Ω (– 2 ; – 1).

3e cas : $m<5$

Dans ce cas, $m-5<0$.

$\mathcal{C}_m$ est l'ensemble vide.