1ère S

Exercices sur les suites (2)

Dans les exercices **1** à **5**, on donne une suite u définie sur $\mathbb{N}$ (sauf pour le **2** où la suite est définie sur $\mathbb{N}^*$) par son terme général u_n.
Etudier le sens de variation de u.

1 $u_n = 2n^2 + n$ **2** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ **3** $u_n = 2\times 3^n - 1$ **4** $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ **5** $u_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

6 Soit u la suite définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n\left(1-u_n\right)$.
Etudier le sens de variation de u.

Corrigé

Objectif des exercices : étudier le sens de variations de suites en utilisant à chaque fois la méthode adaptée.
Il faut donc toujours réfléchir au choix de la méthode avant de commencer.
Parfois, plusieurs méthodes sont possibles ce qui permet de comparer les méthodes entre elles).

Une consigne : tirer tous les traits de fraction à la règle lorsque c'est utile (exercices où le terme général de la suite est défini par un quotient).

1 Méthode par différence ou par étude de fonction.

● Méthode par différence

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 2\left(n+1\right)^2 + \left(n+1\right) - \left(2n^2+n\right) = ... = 4n+3$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4n+3 > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante à partir de l'indice 0.

● Méthode par étude de fonction (un peu plus longue)

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = 2x^2 + x$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f\left(n\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'\left(x\right) = 4x+1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'\left(x\right) \geq 0$ (car la somme de deux nombres positifs est positive).

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (si x est positif, c'est croissant quoiqu'il arrive)

Par conséquent, la suite $\left(u_n\right)$ est croissante à partir de l'indice 0.

2 Méthode par différence ou par étude de fonction

● Méthode par différence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n\left(n+2\right) - \left(n+1\right)^2}{n\left(n+1\right)} = -\frac{1}{n\left(n+1\right)}$$ (ne pas développer le dénominateur)

Formule $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n\left(n+1\right)} < 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

● Méthode par étude de fonction

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\left(x\right) = \dfrac{x+1}{x}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = f\left(n\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'\left(x\right) = ... = -\dfrac{1}{x^2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'\left(x\right) < 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent, la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante à partir de l'indice 1.

● Méthode par quotient

La méthode par quotient marche mais est un peu longue (donc à éviter).

3 Méthode par différence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \left(2\times 3^{n+1} - 1\right) - \left(2\times 3^n - 1\right) = 2\times 3^{n+1} - 2\times 3^n = 2\times 3^n \times 3 - 2\times 3^n = 6\times 3^n - 2\times 3^n = 4\times 3^n$$

$3^{n+1} = 3\times 3^n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4\times 3^n > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite $\left(u_n\right)$ est strictement croissante à partir de l'indice 0.

N.B. : La méthode par étude de fonction n'est pas envisageable (impossibilité de définir une fonction en 1ère).

$\boxed{4}$ **Méthode par différence ou étude de fonction.**

● Méthode par différence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^2(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{n^3} - 2n^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)}$$

(ne pas développer le dénominateur)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.

● Méthode par étude de fonction

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

N.B. : Pour introduire la fonction, on peut faire une phrase du type : « Soit f la fonction définie par $f(x) = \ldots$ ».

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = f(n)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ car f est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \quad f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \quad .$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \geq 0$ (car le numérateur et le dénominateur sont positifs ou nuls).

N.B. : On met bien le signe supérieur ou égal

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par conséquent, la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

$\boxed{5}$ **Méthode par différence ou par quotient.**

● Méthode par différence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{n+2}{2 \times 2^n} - \frac{n+1}{2^n} = \frac{(n+2) - 2(n+1)}{2 \times 2^n} = -\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{n}{2^{n+1}} \leq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

● Méthode par quotient

Rappel : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$

Il faut d'abord dire que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
On peut le traduire mathématiquement de deux manières (et deux seulement).
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ (tous les termes de la suite sont strictement positifs)
ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \mathbb{R}_+^*$ (tous les termes de la suite appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$)
C'est très important à dire car sinon la propriété des quotients ne s'applique pas.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} - 1 = \frac{n+2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2 \times \cancel{2^n}} \times \frac{\cancel{2^n}}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2(n+1)} - 1 = \frac{n+2-2(n+1)}{2(n+1)} = -\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{n}{2(n+1)} \leq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.

N.B. : La suite (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 1.

$\boxed{6}$ On utilise la **méthode par différence**.

On ne cherche pas à « trouver » u_n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n - (u_n)^2 - u_n \quad \text{(on remplace } u_{n+1} \text{ et on laisse } u_n \text{ tel quel)}$$
$$= -(u_n)^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -(u_n)^2 \leq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice 0.