$1^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les suites (1)

1 Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n^2 + n$.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

2°) Exprimer en fonction de n : u_{n+1}, $u_n + 1$, u_{2n}.

2 Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

1°) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

2°) Exprimer en fonction de n : u_{n+1}, $u_n + 1$, u_{2n}. Faire les traits de fraction à la règle.

3 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 3u_n$.

Calculer u_1, u_2, u_3.

4 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}$.

Calculer u_1, u_2, u_3.

5 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 6 - u_n$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

2°) Calculer u_{100}.

6 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{5}{u_n}$.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

2°) Calculer u_{100}.

7 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1°) Déterminer la fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

2°) Calculer u_1, u_2, u_3.

8 Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 = -2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4} + 1$.

1°) Déterminer la fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

2°) Calculer u_1, u_2, u_3.

9 Soit u une suite telle que $u_{n+1} = \dfrac{2}{(u_n)^2 + 1}$.

Calculer u_1, u_2, u_3 dans les deux cas :

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $u_0 = 0$ <u>2$^{\text{e}}$ cas</u> : $u_0 = 1$

Ajouter exercices représentation graphique d'une suite dans un repère.

10 On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = -3$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n - 3$.

Le but de l'exercice est de représenter graphiquement les premiers termes de la suite u selon le procédé usuel d'une suite définie par récurrence.

1°) Déterminer la fonction f associée à u.

2°) Tracer sur un même graphique la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Prendre 0,5 cm pour unité graphique et prendre une page complète pour le graphique.

3°) Faire apparaître u_0, u_1, u_2, u_3 … sur l'axe des abscisses (sans calculer les termes).

Laisser les constructions apparentes en pointillés.

11 On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Représenter graphiquement selon le procédé usuel d'une suite définie par récurrence les premiers termes de la suite u dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Prendre 1 cm pour unité graphique.

Réponses

1 1°) $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = 10$, $u_3 = 21$ 2°) $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + (n+1) = ... = 2n^2 + 5n + 3$; $u_n + 1 = 2n^2 + n + 1$; $u_{2n} = 8n^2 + 2n$

2 1°) $u_0 = -1$; $u_1 = 0$; $u_2 = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = \dfrac{1}{2}$ 2°) $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}$; $u_n + 1 = \dfrac{n-1}{n+1} + 1 = \dfrac{(n-1)+(n+1)}{n+1} = ... = \dfrac{2n}{n+1}$; $u_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

3 $u_1 = -1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 35$

4 $u_1 = 5$, $u_2 = 5$, $u_3 = 5$, …

Remarque : La suite (u_n) est constante mais on n'a pas les moyens de le démontrer en $1^{\text{ère}}$.

5 1°) $u_1 = 4$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 2$…

Remarque :

On observe d'après le calcul des premiers termes que la suite est « répétitive ».

La suite (u_n) est périodique de période 2 mais on n'a pas le moyen de le démontrer en $1^{\text{ère}}$.

2°) $u_{100} = 2$

6 1°) $u_1 = \dfrac{5}{3}$, $u_2 = 3$, $u_3 = \dfrac{5}{3}$, $u_4 = 3$, $u_5 = \dfrac{5}{3}$, $u_6 = 3$, … La suite (u_n) est périodique de période 2 mais on n'a pas le moyen de le démontrer en $1^{\text{ère}}$.

2°) $u_{100} = 3$

7 1°) La fonction associée à la suite (u_n) est la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3}$ (en effet, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$).

2°) $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = \sqrt{5}$

$\boxed{8}$ 1°) La fonction associée à la suite (u_n) est la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{x}{4}+1$.

2°) $u_1=\dfrac{1}{2}$, $u_2=\dfrac{9}{8}$, $u_3=\dfrac{41}{32}$.

$\boxed{9}$ 1°) $u_1=2$, $u_2=\dfrac{2}{5}$, $u_3=\dfrac{50}{29}$. 2°) $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=1$

Dans ce deuxième cas, la suite (u_n) est constante (mais on n'a pas le moyen de le démontrer en première).

$\boxed{10}$ 1°) La fonction associée à *u* est la fonction $f: x \mapsto -2x-3$ (car $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1}=f(u_n)$).

2°) La fonction *f* est une fonction affine donc sa représentation graphique est la droite *D* d'équation $y=-2x-3$.

On trace la droite *D* d'équation $y=-2x-3$.

x	0	-4
y	-3	5

On trace la droite Δ d'équation $y=x$.

On ne calcule pas les termes.

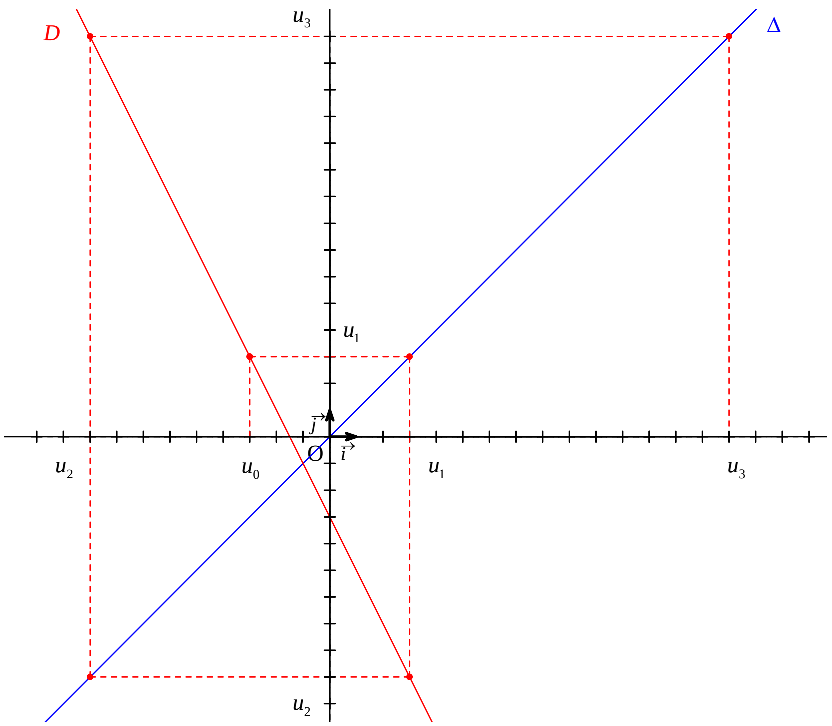
On place $u_0=-3$ sur l'axe des abscisses.

On remonte jusqu'à la droite *D*. L'ordonnée du point correspondant est égale à u_1 (on peut lire alors la valeur 1, mais cela n'a pas d'importance pour la suite).
La valeur de u_1 apparaît sur l'axe des ordonnées.
On utilise la droite Δ pour redescendre la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses.

On effectue les tracés en pointillés au crayon à papier ou au critérium.

On obtient un escargot qui s'agrandit.

On arrive à voir les termes de la suite jusqu'à u_3.
Au-delà, ça sort de la feuille !



On obtient une sorte de spirale qui sort assez vite de la feuille.

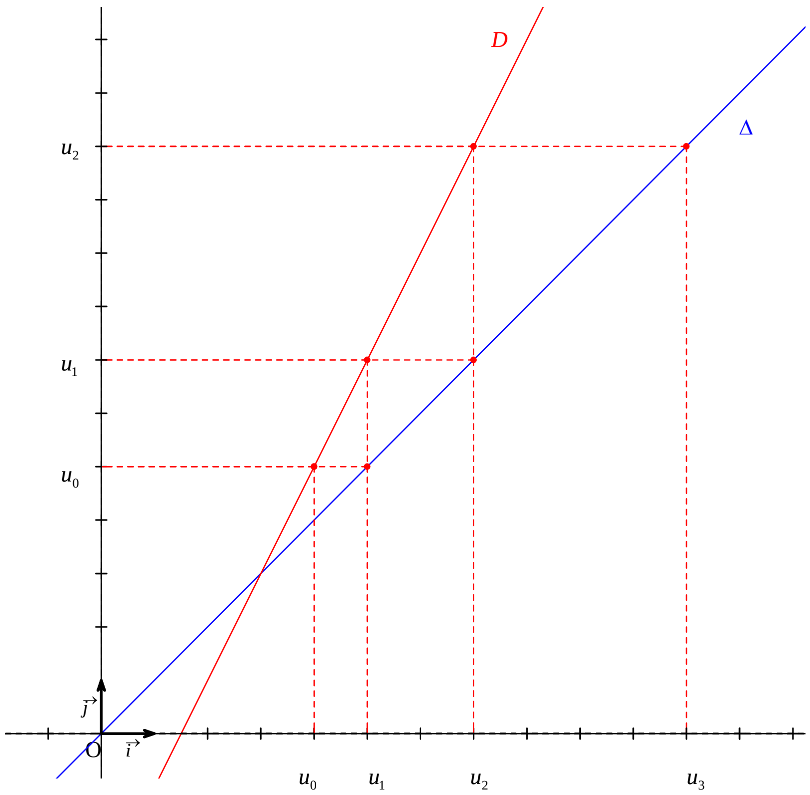
Quelques conseils :

La construction des pointillés doit se faire à la règle.

Bien mettre les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 … sur l'axe des abscisses.

Cette représentation graphique permet de dégager quelques propriétés de la suite : par exemple, on voit que la suite n'est pas monotone.

$\boxed{11}$ 1°) $f : x \mapsto 2x - 3$.
2°) La fonction *f* est une fonction affine donc sa représentation graphique est une droite *D*.



On obtient une construction en « marche d'escalier ».

Grâce à cette représentation graphique, on voit déjà que la suite (u_n) semble strictement croissante.

Classification des exercices par compétences

Les exercices de ce chapitre tournent essentiellement sur le calcul des termes d'une suite définie de manière explicite ou par récurrence, les calculs sur les indices, la représentation graphique des termes d'une suite définie par récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Autour de cela, les exercices ont pour but de familiariser l'élève avec le vocabulaire usuel des suite : terme, terme général, indice….

Compétences	**Exercices**
Calculer les termes d'une suite définie de manière explicite	**1** et **2**.
Calculer les termes d'une suite définie par récurrence	**3** à **9**.
Calculer avec les indices	**1** et **2** .
Représenter les termes d'une suite définie par récurrence	**10** et **11**.