1ère S — Exercices sur les compléments sur les dérivées

1 Un point mobile M se déplace sur un axe Δ de repère $\left(\text{O}, \vec{i}\right)$. Son abscisse à l'instant t est $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

1°) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants 1 et 3.
2°) Déterminer à quels instants le mobile est en O.
3°) Déterminer la vitesse instantanée du mobile à l'instant 2.

2 Un point mobile M se déplace sur un axe Δ de repère $\left(\text{O}, \vec{i}\right)$. A chaque instant $t \geq 0$, on repère sa position par son abscisse $x(t) = 6t - 3t^2$.

1°) Calculer la vitesse v_0 de ce mobile à l'instant $t = 0$.
2°) Décrire le mouvement du mobile sur l'axe Δ.
3°) Quelle est la vitesse du mobile quand il change de sens ?
4°) Quelle est la vitesse du mobile quand il repasse en O ?

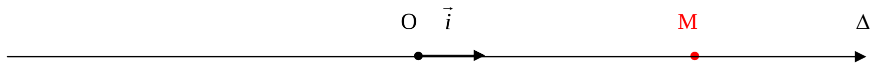
3 On laisse tomber un objet du sommet d'une falaise à l'instant $t = 0$.
On estime qu'à chaque instant, l'altitude (en mètres) de l'objet est donnée par : $a(t) = 100 - 5t^2$ (t est en secondes).
1°) Quelle est la hauteur de la falaise ?
2°) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint le sol ?

4 Un objet est lancé verticalement vers le haut à partir de l'instant $t = 0$.
Pendant la phase ascendante, la hauteur, en mètres, de cet objet à l'instant t est : $h(t) = 1 + 7t - 5t^2$ (t en secondes).
1°) De quelle hauteur lance-t-on cet objet ?
2°) Déterminer sa vitesse en fonction de t.
3°) Quelle hauteur maximale atteint-il ?

5 Deux mobiles M et N se déplacent sur un axe rectiligne d'origine O et d'unité 1 m. La loi horaire (t en s) du point M est donnée par : $f(t) = 100 - 5t$ et celle du point N par : $g(t) = \frac{1}{2}t^2$.
Quelles sont les vitesses des deux mobiles lorsqu'ils se rencontrent ?

Corrigés

1 $x(t)=2t^2-3t+1$ (loi horaire du mouvement).



1°) Calculons la vitesse moyenne du mobile entre les instants 1 et 3.

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(3)-x(1)}{3-1}=\frac{x(3)-x(1)}{2}$$

$x(3)=2\times9-9+1=18-8=10$

$x(1)=2\times1-3+1=0$

$$v=\frac{10-0}{2}=5$$

La vitesse moyenne du mobile entre les instants 1 et 3 est égale à 5 (on ne met pas d'unité car on est en mathématiques).

2°) Déterminons à quels instants le mobile est en O.

On résout l'équation $x(t)=0$ soit $2t^2-3t+1=0$.

Les racines de cette équation sont 1 (racine évidente) et $\frac{1}{2}$ (obtenue par produit).

Le mobile est en 0 aux instants 1 et $\frac{1}{2}$.

3°) Déterminons la vitesse instantanée du mobile à l'instant 2.

La fonction x est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme fonction polynôme et $\forall t\in[0\,;+\infty[$ $\quad \dot{x}(t)=4t-3$.

$\dot{x}(2)=8-3=5$

La vitesse instantanée du mobile à l'instant 2 est égale à 5.

2 La loi horaire du mouvement est donnée par $x(t)=6t-3t^2$.

1°) Calculons la vitesse v_0 de ce mobile à l'instant $t=0$.

La fonction x est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme fonction polynôme et $\forall t\in[0\,;+\infty[$ $\quad \dot{x}(t)=-6t+6$.

Par suite, on a : $\dot{x}(0)=6$

La vitesse instantanée du mobile à l'instant 0 est égale à $v_0=\dot{x}(0)=6$.

2°) Tableau de variation de x sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\dot{x}(t)$		+	0	–	
Variations de x	0	↗	3	↘	

3°) Le mobile change de sens à l'instant 1.

$\dot{x}(1)=0$

La vitesse instantanée du mobile à l'instant 1 est égale à 0.

4°)

$$x(t)=0 \iff \begin{cases} t=0 \\ \text{ou} \\ t=2 \end{cases}$$

3 1°) La hauteur de la falaise est égale à $a(0)=100-5\times0^2=100$ m.

2°) On résout l'équation $a(t)=0$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\iff 100-5t^2=0\\ &\iff 5t^2=100\\ &\iff t^2=20\\ &\iff t=\sqrt{20}\ \text{ ou }\ t=-\sqrt{20}\\ &\iff t=2\sqrt{5}\ \text{ ou }\ t=-2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Donc l'objet atteint le sol à l'instant $t=2\sqrt{5}$.

La fonction *a* est dérivable sur [0 ; +∞[(car c'est une fonction polynôme du second degré) et
$\forall t \in [0\ ;+\infty[\quad \dot{a}(t)=-10t$.

$\dot{a}\left(2\sqrt{5}\right)=-10\times 2\sqrt{5}=-20\sqrt{5}$

La vitesse instantanée de l'objet lorsqu'il atteint le sol est égale à $-20\sqrt{5}$ m.s^{-1}.

$-20\sqrt{5}\approx -44,7$ (valeur arrondie au dixième)

La vitesse instantanée de l'objet lorsqu'il atteint le sol est environ égale à 44,7 $\text{m}\bullet\text{s}^{-1}$.

$\boxed{4}$ $h(t)=1+7t-5t^2$

1°)

Calculons $h(0)=1+7\times 0-5\times 0^2=1$.
La hauteur à l'instant $t=0$ est 1 mètre.

2°) La fonction *h* est dérivable sur [0 ; +∞[(car c'est une fonction polynôme du second degré) et
$\forall t \in [0\ ;+\infty[\quad h'(t)=-10t+7$.

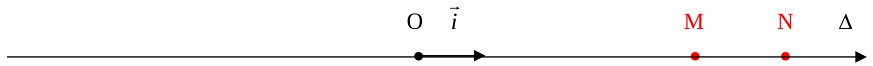
3°) *h* est une fonction polynôme du second degré.

Le coefficient du terme de degré 2 est strictement positif donc le maximum de *h* est atteint pour
$t=-\dfrac{7}{2\times(-5)}=\dfrac{7}{10}=0,7$ (on applique le résultat du cours sur les fonctions polynômes du second degré directement ; on peut aussi dresser le tableau de variation de *h*).

$h(0,7)=1+7\times 0,7-5\times 0,7^2=3,45$

La hauteur maximale atteinte par l'objet est égale à 3,45 m.

$\boxed{5}$ $f(t)=100-5t$; $g(t)=\dfrac{1}{2}t^2$



Cherchons le temps au bout duquel les mobiles se rencontrent.

On résout l'équation $f(t)=g(t)$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 100-5t=\dfrac{1}{2}t^2$
$\Leftrightarrow t^2+10t-200=0$ (1')

Considérons le polynôme $t^2+10t-200$.

$a=1$; $b'=-5$; $c=-200$

Le discriminant réduit de (1') est égal à : $\Delta'=b'^2-ac=225=15^2$.

L'équation (1') admet donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$:
$t_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-5-15=-20$ et $t_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-5+15=10$.

Les deux mobiles se rencontrent donc à l'instant 10 s.

f et *g* sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (car ce sont des fonctions polynômes)
$\forall t\in\mathbb{R}\quad f'(t)=-5$
$\forall t\in\mathbb{R}\quad g'(t)=t$

Donc $f'(10)=-5$ et $g'(10)=10$.

Lorsque les deux mobiles se rencontrent, la vitesse instantanée de M est égale à – 5 m/s et la vitesse instantanée de N est égale à 10 m/s.