$1^{\text{ère}}$ S — Exercices supplémentaires sur les aires et les relations métriques

1 1°) Démontrer que toute médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.
2°) **Application**
Soit ABC un triangle quelconque.
On pose $A' = S_B(A)$, $B' = S_C(B)$, $C' = S_A(C)$.
Exprimer l'aire de A'B'C' en fonction de celle de ABC.

2 On considère un triangle équilatéral ABC. Soit M un point quelconque intérieur à ABC.
On note H, K, L ses projetés orthogonaux respectifs sur les droites (AB), (BC), (CA).
Démontrer que la somme $MH + MK + ML$ est constante.
Indication :
Considérer $\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{BCM} + \mathcal{A}_{ACM}$.

3 Soit ABC un triangle quelconque, I le centre de son cercle inscrit et A', B', C' les projetés orthogonaux respectifs de I sur les droites (BC), (CA), (AB).
On note S l'aire de ABC, p son périmètre et r le rayon du cercle inscrit.
Démontrer que l'on a : $S = \frac{1}{2} \times p \times r$.
Indication :
Considérer $\mathcal{A}_{IAB} + \mathcal{A}_{IBC} + \mathcal{A}_{ICA}$.

4 Soit ABCD un quadrilatère convexe. On note O le point d'intersection des diagonales et l'on note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.
Faire une figure en marquant les mesures des angles en O.
1°) Simplifier $\sin(\pi - \theta)$.
2°) Exprimer l'aire de OAB et de OBC (sous forme littérale) ; en déduire que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times OB \times \sin\theta$.
3°) Déterminer une formule analogue pour $\mathcal{A}_{ACD}$.
4°) Exprimer $\mathcal{A}_{ABCD}$ en fonction de AC, BD et $\sin\theta$.

5 **La formule de Héron**

Soit ABC un triangle quelconque.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ et S l'aire du triangle ABC.
On pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$ (demi-périmètre).
1°) Calculer $\cos\alpha$ en fonction de a, b, c.
2°) Calculer $\sin^2\alpha$ en fonction de a, b, c (numérateur sous forme factorisée).
3°) Calculer S^2 en fonction de a, b, c.
4°) Développer l'expression $E = p(p-a)(p-b)(p-c)$ en fonction de a, b, c, en tâchant d'être astucieux. En déduire que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec de l'antiquité (75-150 après Jésus-Christ).
Cette formule figure dans son traité de géométrie intitulé **« Les Métriques »**.

Indications

1 1°) 2°) **Application**

$\mathcal{A}_{A'B'C'} = 7\,\mathcal{A}_{ABC}$

On note S l'aire du triangle ABC.
Bien repérer sur la figure les triangles et des médianes de manière à faire apparaître 7 triangles qui ont la même aire S.
Il n'est pas question ici de triangles isométriques.

5 **La formule de Héron**

Indications :

Cet exercice est très intéressant du point de vue algébrique : identités remarquables, longs calculs littéraux, réflexion sur la manière de bien mener ces calculs…

1°) Utiliser la formule d'Al Kashi. La loi des sinus n'intervient pas ici.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

2°) $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}$.

3°) $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}}$.

$$S = \frac{1}{2}bc\times\frac{1}{2bc}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$$

4°) $p(p-a) = \frac{a+b+c}{2}\times\frac{-a+b+c}{2} = \frac{\left[(b+c)+a\right]\times\left[(b+c)-a\right]}{4}$

On applique l'identité remarquable au numérateur $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

$$p(p-a) = \frac{(b+c)^2-a^2}{4} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4}$$

On procède de même pour $(p-b)(p-c)$.
On multiplie ensuite ensemble les deux résultats.
On obtient ainsi :

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{16}.$$