$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur l'approximation affine tangente

1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

1°) Déterminer la fonction affine tangente g associée à f en 1.
2°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$				
$g(x)$				

Commenter ce tableau.
A-t-on besoin de la calculatrice pour calculer les nombres de la troisième ligne ?

2 À l'aide de la formule de l'approximation affine tangente d'une fonction au voisinage d'un réel bien choisi, donner sans calculatrice une valeur approchée des réels suivants :
1°) $(5{,}001)^2$ 2°) $(2{,}001)^3$ 3°) $(1{,}997)^3$

On commencera par définir une fonction.
On ne cherchera pas à évaluer l'erreur.
Comparer avec les résultats fournis par une calculatrice.

3 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(0)=1$.
On admettra qu'une telle fonction existe sans chercher à déterminer l'expression.

Calculer une valeur approchée de $f(0{,}1)$ puis de $f(0{,}01)$ par la formule d'approximation affine tangente.
On ne cherchera pas à évaluer l'erreur.

4 Approximations affines tangentes des fonctions de référence en 1

Dans chaque cas, on définit une fonction f par son expression.
On demande de donner une valeur approchée de $f(1+h)$ pour h « proche » de 0 par la formule d'approximation affine tangente.

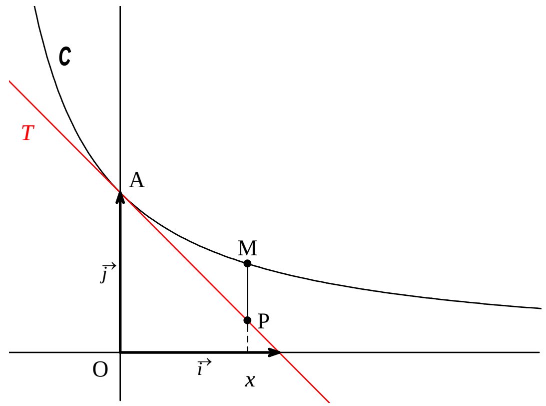
1°) Fonction puissance : $f(x)=x^n$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1)
2°) Fonction inverse : $f(x)=\dfrac{1}{x}$
3°) Fonction racine carrée : $f(x)=\sqrt{x}$

Recopier et compléter le tableau pour h « proche » de 0 :

$(1+h)^n \approx$ ....
$\dfrac{1}{1+h} \approx$ ....
$\sqrt{1+h} \approx$ ....

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Déterminer l'approximation affine tangente de $f(4+h)$ pour h proche de 0.

6 On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A(0 ; 1).
Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et P le point de T qui a la même abscisse que M.



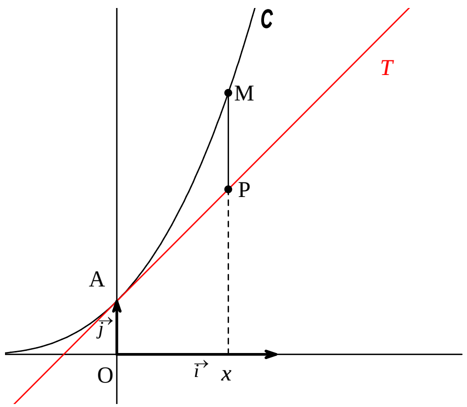
1°) Établir une équation de T.
2°) Exprimer la distance MP en fonction de x.
3°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au dix-millième.

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP					

4°) Démontrer que si $0 \le x \le 0{,}1$, alors $\text{MP} \le 0{,}01$.
Interpréter ce résultat en termes d'approximation affine et d'erreur.

$\boxed{7}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A(0 ; 1).
Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et P le point de T qui a la même abscisse que M.



1°) Établir une équation de T.
2°) Exprimer la distance MP en fonction de x.
3°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au dix-millième.

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP					

4°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 0{,}1$, alors $\mathrm{MP} \leq 0{,}04$.
Interpréter ce résultat en termes d'approximation affine et d'erreur.

$\boxed{8}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$.
1°) Déterminer l'approximation affine tangente de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
2°) Démontrer que pour tout réel h, on a : $(1+h)^3-1-3h=3h^2+h^3$.
En déduire que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq (1+h)^3-1-3h \leq 4h^2$.
3°) Donner de tête une valeur approchée de $1{,}01^3$ et préciser un majorant de l'erreur.

Réponses

$\boxed{1}$ 1°) $g(x)=2x-1$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x^2$. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x)=2x$.

La fonction g affine tangente associée à f en 1 est définie par :
$g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$
soit $g(x)=2(x-1)+1$
soit $g(x)=2x-1$

Remarques :

- On ne parle pas de la tangente (car inutile).
- Dans cet exercice, on réutilise g à la 2^e question (on n'utilise pas la formule d'ATT : $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$).

2°)

x	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)$	1,21	1,0201	1,0020001	1,00020001
$g(x)$	1,2	1,02	1,002	1,0002

On constate que pour des valeurs de x proches de 1, les valeurs de $f(x)$ sont très proches des valeurs de $g(x)$.

g simplifie le calcul.
Le calcul des nombres de la 3^e ligne se fait presque mentalement.

$\boxed{2}$ 1°) $(5{,}001)^2 \approx 25{,}01$ 2°) $(2{,}001)^3 \approx 8{,}012$ 3°) $(1{,}997)^3 \approx 7{,}964$
Solutions détaillées :

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad f'(x)=2x$
$5{,}001=5+0{,}001$
On pose :
$a=5$
$h=0{,}001$ (proche de 0).
Pour h « proche » de 0, on a : $f(5+h) \approx f(5)+hf'(5)$.
$f(5)=5^2=25$
$f'(5)=2\times 5=10$

$f(5{,}001) \approx f(5) + 0{,}001 \times f'(5)$

$f(5{,}001) \approx 25 + 0{,}001 \times 10$

$f(5{,}1) \approx 25{,}01$

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$. $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$

$2{,}001 = 2 + 0{,}001$

On pose :
$a = 2$
$h = 0{,}001$ (proche de 0).

Pour h « proche » de 0, on a : $f(2{,}001) \approx f(2) + 0{,}001 \times f'(2)$.

$f(2) = 2^3 = 8$

$f'(2) = 12$

$f(2{,}001) \approx f(2) + 0{,}001 \times f'(2)$

$f(2{,}001) \approx 8 + 12 \times 0{,}001$

$f(2{,}001) \approx 8{,}012$

3°) On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$. $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$

$1{,}997 = 2 - 0{,}003$

On pose :
$a = 2$
$h = -0{,}003$ (proche de 0).

Pour h « proche » de 0, on a : $f(2+h) \approx f(2) + hf'(2)$.

$f(2) = 2^3 = 8$

$f'(2) = 12$

$f(1{,}997) \approx f(2) - 0{,}003 \times f'(2)$

$f(1{,}997) \approx 8 - 12 \times 0{,}003$

$f(1{,}997) \approx 7{,}964$

$\boxed{3}$ $f(0) = 1$; $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

• Calculons une valeur approchée de $f(0{,}1)$ par la formule d'AAT

$0{,}1 = 0 + 0{,}1$

On pose :
$a = 0$
$h = 0{,}1$ (proche de 0).

D'après la formule d'AAT appliquée à f en 0, pour h « proche » de 0, on a : $f(0+h) \approx f(0) + hf'(0)$

$f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{0^2+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

On a donc : $f(0{,}1) \approx 1 + 0{,}1 \times 1$ soit $\boxed{f(0{,}1) \approx 1{,}1}$.

• Calculons une valeur approchée de $f(0{,}01)$ par la formule d'AAT

$0{,}01 = 0 + 0{,}01$

On pose :
$a = 0$
$h = 0{,}01$ (proche de 0).

D'après la formule d'AAT appliquée à f en 0, on a : $f(0{,}01) \approx 1 + 0{,}01 \times 1$ soit $\boxed{f(0{,}01) \approx 1{,}01}$.

$\boxed{4}$ **Tableau**

$(1+h)^n \approx 1 + nh$
$\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$
$\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$

Solution détaillée :

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$. $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1}$

D'après la formule d'AAT appliquée à f en 1, pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h) \approx f(1) + hf'(1)$.

$f(1) = 1^n = 1$

$f'(1) = n \times 1^{n-1} = n \times 1 = n$

Donc pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h) \approx 1 + nh$.

2°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}^*$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

D'après la formule d'AAT appliquée à f en 1, pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h) \approx f(1) + hf'(1)$.

$f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$

Donc pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h) \approx 1 - h$.

3°) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}_+$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

D'après la formule d'AAT appliquée à f en 1, pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h) \approx f(1) + hf'(1)$.

$f(1)=\sqrt{1}=1$

$f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$

Donc pour h « proche » de 0, on a : $f(1+h)\approx 1+\dfrac{h}{2}$.

$\boxed{5}$ La formule d'approximation affine tangente en 4 donne : $\sqrt{4+h}\approx 2+\dfrac{h}{4}$ pour h « proche » de 0.

Solution détaillée :

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour h « proche » de 0, on a : $f(4+h)\approx f(4)+hf'(4)$ soit $f(4+h)\approx 2+h\times\dfrac{1}{4}$.

Donc pour h « proche » de 0, $\sqrt{4+h}\approx 2+\dfrac{h}{4}$.

$\boxed{6}$ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $\boldsymbol{D}_f=\,]-1\,;+\infty[$

1°) La fonction f est dérivable sur $\boldsymbol{D}_f$ comme restriction d'une fonction dérivable.

$\forall\, x\in\boldsymbol{D}_f$ $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (on applique la formule de dérivée d'une fonction de la forme $\dfrac{1}{u}$)

Une équation de T s'écrit $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

On a : $f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1$ et $f'(0)=-1$.

L'équation réduite de T s'écrit donc $y=-x+1$.

N.B. : On observe graphiquement que la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de T sur l'intervalle =] –1 ; +∞[; on peut bien évidemment démontrer aisément ce résultat algébriquement.

2°) Exprimons la distance MP en fonction de x.

$$\text{MP}=|\,y_\text{M}-y_\text{P}\,|=|\,f(x)-(-x+1)\,|=\left|\frac{1}{1+x}-(-x+1)\right|=\left|\frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x}\right|=\left|\frac{x^2}{1+x}\right|=\frac{|\,x^2\,|}{|\,1+x\,|}=\frac{x^2}{1+x}$$

$x>-1$ donc $x+1>0$

On pourrait aussi utiliser la formule MP = $\sqrt{(x_\text{P}-x_\text{M})^2+(y_\text{P}-y_\text{M})^2}$ (distance de deux points dans un repère orthonormé).

Comme $x_\text{P}=x_\text{M}$, on peut dire que $\text{MP}=\sqrt{(y_\text{P}-y_\text{M})^2}=|\,y_\text{P}-y_\text{M}\,|$.

3°)

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP	0,00392158…	0,0015346…	0,00339622…	0,0059259…	0,0090909…

4°) Démontrons que si $0\le x\le 0{,}1$, alors $\text{MP}\le 0{,}01$.

Si $0\le x\le 0{,}1$, alors $x^2\le 0{,}01$ (1).

De plus, si $x\ge 0$, $x+1\ge 1$ donc $\dfrac{1}{x+1}\le 1$ (2).

On peut multiplier membre à membre les inégalités (1) et (2) car elles ne comportent que des nombres positifs.

On obtient l'inégalité $\dfrac{x^2}{x+1}\le 0{,}01$.

Interprétons le résultat précédent en termes d'approximation affine et d'erreur.

On a démontre que si $0\le x\le 0{,}1$, alors $\text{MP}\le 0{,}01$.

On peut dire que si $0\le x\le 0{,}1$, alors $g(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 0,01 près.

$\boxed{7}$ $f(x)=(x+1)^3$ $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$

1°) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall\, x\in\boldsymbol{D}_f$ $f'(x)=3(x+1)^2$ (on applique la formule de dérivée d'une fonction de la forme u^n)

Une équation de T s'écrit $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

On a : $f(0)=(1+0)^3=1$ et $f'(0)=3$.

L'équation réduite de T s'écrit donc $y=-x+1$.

2°) Exprimons la distance MP en fonction de x.

$$\text{MP}=|\,y_\text{M}-y_\text{P}\,|=|\,f(x)-(3x+1)\,|=|\,(x+1)^3-(3x+1)\,|=|\,x^3+3x^2+3x+1-3x-1\,|=|\,x^3+3x^2\,|$$

3°)

x	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
MP	0,0012…	0,00486…	0,0110…	0,0120…	0,0310…

4°) Démontrons que si $0 \leq x \leq 0{,}1$, alors $\text{MP} \leq 0{,}04$.

Interpréter ce résultat en termes d'approximation affine et d'erreur.

$x^3 + 3x^2 = x^2\left(x+3\right)$

Soit x un réel tel que l'on ait : $0 \leq x \leq 0{,}1$.
D'une part, on a alors $3 \leq x+3 \leq 3{,}1$ donc $0 \leq x+3 \leq 4$ (1).
D'autre part, on a alors $0 \leq x^2 \leq 0{,}01$ (2).

On peut multiplier membre à membre les inégalités (1) et (2) car elles ne comportent que des nombres positifs.
On obtient l'inégalité $0 \leq x^2\left(x+3\right) \leq 0{,}04$.

Interprétons le résultat précédent en termes d'approximation affine et d'erreur.

On a démontre que si $0 \leq x \leq 0{,}1$, alors $\text{MP} \leq 0{,}04$.

On peut dire que si $0 \leq x \leq 0{,}1$, alors $g\left(x\right)$ est une valeur approchée de $f\left(x\right)$ à 0,04 près.

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto x^3$.
1°) Déterminons l'approximation affine tangente de $f\left(1+h\right)$ pour h proche de 0.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'\left(x\right) = 3x^2$.
D'après la formule d'AAT en 1, pour tout réel h proche de 0, on a : $f\left(1+h\right) \approx f\left(1\right) + hf'\left(1\right)$.

Or $f\left(1\right) = 1$ et $f'\left(1\right) = 3$ donc pour tout réel h proche de 0, on a : $f\left(1+h\right) \approx 1+3h$.

2°) Démontrons que pour tout réel h, on a : $\left(1+h\right)^3 - 1 - 3h = 3h^2 + h^3$.

$\forall h \in \mathbb{R} \quad \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h = \cancel{1} + \cancel{3h} + 3h^2 + h^3 \cancel{-1} \cancel{-3h} = 3h^2 + h^3$.

On utilise l'identité remarquable $\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Déduisons-en que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$.

$\forall h \in \mathbb{R} \quad \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h = 3h^2 + h^3$.

Donc de manière évidente, si $0 \leq h \leq 1$, alors $3h^2 + h^3 \geq 0$ d'où $\left(1+h\right)^3 - 1 - 3h \geq 0$ (1).

D'autre part, $\forall h \in \mathbb{R} \quad \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h = h^2\left(3+h\right)$.

Donc si $0 \leq h \leq 1$, alors $3+h \leq 4$ d'où en multipliant les deux membres de l'inégalité par h^2 qui est positif ou nul, $h^2\left(3+h\right) \leq 4h^2$.
Donc si $0 \leq h \leq 1$, alors $\left(1+h\right)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$ (2).

D'après (1) et (2), on en déduit que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$.

3°) D'après la formule d'AAT établie au 1°), en prenant $h = 0{,}01$ (considéré comme « proche » de 0),

$f\left(1+0{,}01\right) \approx 1 + 3 \times 0{,}01$ d'où $f\left(1{,}01\right) \approx 1{,}03$.

D'où $1{,}01^3 \approx 1{,}03$.

Dans la question 2°), on a établi que pour tout réel h tel que $0 \leq h \leq 1$, on a $0 \leq \left(1+h\right)^3 - 1 - 3h \leq 4h^2$ soit
$0 \leq \underbrace{f\left(1+h\right)}_{\text{valeur exacte}} - \underbrace{\left(1+3h\right)}_{\text{valeur approchée}} \leq 4h^2$.

Donc si $0 \leq h \leq 1$, l'erreur commise est majorée par $4h^2$.

Donc pour $h = 0{,}01 = 10^{-2}$, un majorant de l'erreur commise est de 4×10^{-4}.

Il peut être intéressant de calculer $1{,}01^3$ à l'aide de la calculatrice et de calculer l'erreur commise pour la valeur approchée fournie par la formule d'AAT.
On voit bien alors que le résultat obtenu est en conformité le résultat qui vient d'être établi à savoir que l'erreur commise est de 4×10^{-4}.