$1^{\text{ère}}$ S Exercices sur les relations métriques dans un triangle

1 Soit ABC un triangle tel que AB = 5, AC = 9 et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC (valeur exacte).

2 Soit ABC un triangle tel que AB = 7, AC = 4 et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC (valeur exacte).

3 Soit ABC un triangle tel que AB = 5, BC = 7 et CA = 6.
Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

4 Soit ABC un triangle tel que BC = 9, $\widehat{ABC} = 65°$ et $\widehat{ACB} = 47°$.
1°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AB.
2°) Calculer la valeur arrondie au dixième de AC.

5 Soit ABC un triangle tel que AB = 6, BC = 8 et CA = 4.
On note I le milieu de [AB].
Calculer CI (valeur exacte).

6 Soit A et B deux points tels que AB = 6.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$.

7 Soit A et B deux points tels que AB = 2.
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = 16$.

Corrigé

1 D'après la formule du côté dans le triangle ABC, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.
$BC^2 = 25 + 81 - 90 \times \cos 60°$
$BC^2 = 61$
$BC = \sqrt{61}$

2 $BC = \sqrt{37}$ (formule d'Al Kashi)

3 On utilise la formule d'Al Kashi.

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{5}$; $\widehat{BAC} = 78,48...°$ donc $\widehat{BAC} \approx 78,5°$ (valeur arrondie au dixième)

On peut calculer les mesures des autres angles du triangle ABC en réutilisant la formule d'Al Kashi.

4 On utilise la loi des sinus.
$AB \approx 7,1$ (valeur arrondie au dixième) ; $AC \approx 8,8$ (valeur arrondie au dixième)

Qu'appelle-t-on **résolution** d'un triangle ?
On dit que l'on résout un triangle pour exprimer que l'on calcule les mesures des côtés et/ou des angles du triangle que l'on ne connaît pas.

5 $CI = \sqrt{31}$ (formule de la médiane)

6 L'ensemble *E* est le cercle de centre I (milieu de [AB]) et de rayon 5.
On utilise une formule de la médiane.

Solution détaillée

$1^{\text{ère}}$ partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de [AB].

D'après l'une des formules de la médiane,

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Donc $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$

2^{e} partie : chaîne d'équivalences

$M \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$
si et seulement si $MI^2 - 9 = 16$
si et seulement si $MI^2 = 25$
si et seulement si $MI = 5$

3^{e} partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble *E* est le cercle de centre I et de rayon 5.

Attention aux conclusions fausses :

« L'ensemble *E* des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon 5. »

Faux ; en effet, l'ensemble des points du plan est… le plan.

« L'ensemble *E* des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ est le cercle de centre I et de rayon 5. »

Juste mais trop long.

7 Recherche d'un ensemble de points

$1^{\text{ère}}$ partie : autre expression du premier membre

Soit I le milieu de $[AB]$.

D'après l'une des formules de la médiane,

$\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Donc $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 4$

2e partie : chaîne d'équivalences

$\text{M} \in E$ si et seulement si $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = 16$

si et seulement si $2\text{MI}^2 + 4 = 16$

si et seulement si $\text{MI}^2 = 6$

si et seulement si $\text{MI} = \sqrt{6}$

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

L'ensemble *E* est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Tracé

Construction d'un segment de longueur $\sqrt{6}$.

$6 = ...^2 + ...^2$ (pas possible d'écrire 6 comme somme de deux carrés d'entiers naturels)
$6 = ...^2 - ...^2$ (pas possible d'écrire 6 comme différence de deux carrés d'entiers naturels)

Méthode de construction : méthode de Descartes

Ou $6 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$

On sait construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ à la règle et au compas (hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 1).
On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 2 et $\sqrt{2}$.