$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur le produit scalaire dans le plan)

1 Soit ABCD un carré de côté a. Calculer les produits scalaires
$p_1=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$; $p_2=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}$; $p_3=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}$; $p_4=\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{DB}$.

2 Soit A et B deux points tels que $AB=a$. On note I le milieu de [AB] et J le symétrique de B par rapport à A.
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{IA}\bullet\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BJ}$.

3 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = AC = 5 et BC = 4. Soit I le milieu de [BC].
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$.

4 Soit A, B, C trois points tels que $AB=4$, $AC=6$ et $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=12$.
Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

5 Soit ABCD un carré de côté a.
On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$.
Faire une figure codée en prenant (AB) « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D « au-dessus » de (AB).
Démontrer que $(AJ)\perp(DI)$.

6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\bullet\vec{v}=-2$. Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\bullet\vec{v}=2$.
Déterminer k tel que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On rédigera ainsi :
« $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si …… ».

8 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB], C un point quelconque de $\mathcal{C}$ et D un point quelconque de [AB].
La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.
Démontrer que l'on a : $AD\times AB=AE\times AC$.
Indication : calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AB}$.

9 Soit ABCD un parallélogramme. On pose AB = a et AD = b.
Calculer $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}$ en fonction de a et b.

10 Soit ABCD un parallélogramme.
Démontrer que l'on a : $AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$.

11 Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a>0$. On note G le barycentre des points pondérés $(A\,;\,-4)$, $(B\,;\,3)$ et $(C\,;\,2)$.
Faire une figure en prenant (AB) « horizontale », A à gauche de B, C « au-dessus » de (AB).
Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Placer alors le point G sur la figure.
Calculer AG en fonction de a.

12 Soit ABC un triangle du plan P.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0$.

13 Soit ABC un triangle du plan P.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AC}$.

14 Soit A et B deux points distincts du plan P.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{AB}=AB^2$.

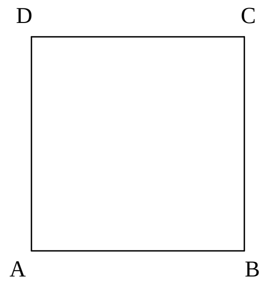
Soit A et B deux points distincts du plan P.
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $MA^2-4MB^2=0$.
Indications :
- introduire des carrés scalaires ;
- factoriser en utilisant des identités remarquables ;
- introduire des barycentres.

16 Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit D et D' deux droites perpendiculaires à (AB). Ces droites coupent respectivement (AB) en M et N.
Soit P un point quelconque de D ; la droite (AP) coupe D' en Q.

Quel est le projeté orthogonal du point P sur (AB) ?
Quel est le projeté orthogonal du point B sur D' ?
Comparer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PN}$.

Réponses

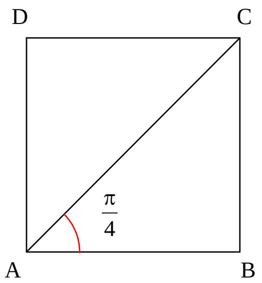
1 $p_1=a^2$; $p_2=0$; $p_3=-a^2$; $p_4=-a^2$

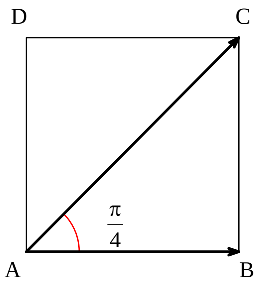


Détail des calculs :

Calcul de p_1

$1^{\text{ère}}$ méthode : on utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs.





$p_1 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos \widehat{\mathrm{BAC}}$ (on évite d'écrire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\right)$ qui est un peu lourd, même si c'est ce que l'on fait en physique)

Or ABCD est un carré donc ABC est rectangle isocèle en A.

Par suite $\widehat{\mathrm{BAC}} = \frac{\pi}{4}$.

De plus, $\mathrm{AC} = a\sqrt{2}$ (formule donnant la diagonale d'un carré).

D'où : $p_1 = a \times a\cancel{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$p_1 = a^2$

2$^{\text{e}}$ méthode : on utilise les projetés orthogonaux

ABCD est un carré donc $(\mathrm{BA}) \perp (\mathrm{BC})$.

B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$p_1 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$ (carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$)

$p_1 = \mathrm{AB}^2$

$p_1 = a^2$

Calcul de p_2

ABCD est un carré donc $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{BC})$.

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont orthogonaux.

Donc $p_2 = 0$ (le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul).

Calcul de p_3

Comme ABCD est un carré, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Donc $p_3 = -\mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = -a^2$.

Calcul de p_4

1$^{\text{ère}}$ méthode :

$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$p_4 = \mathrm{DA} \times \mathrm{DB} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}}}\right)$

Il est impératif de mettre le chapeau car il s'agit d'un angle géométrique de vecteurs.

Si l'on ne met pas de chapeau, alors il s'agit d'un angle orienté de vecteurs ce qui n'est pas possible car le plan n'est pas orienté.

$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{3\pi}{4}$

$p_4 = a \times a\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$p_4 = -a^2$

2$^{\text{e}}$ méthode :

$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$p_4 = \left(-\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right) \bullet \overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$p_4 = -\left(\overrightarrow{\mathrm{DA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DB}}\right)$

$p_4 = -\mathrm{DA} \times \mathrm{DB} \times \cos \widehat{\mathrm{ADB}}$

$p_4 = -a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$p_4 = -a^2$

3$^{\text{e}}$ méthode :

ABCD est un carré donc $(\mathrm{AD}) \perp (\mathrm{AB})$.

A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DB}}$

$p_4 = \overrightarrow{\mathrm{AD}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$p_4 = -\mathrm{AD} \times \mathrm{AD}$

$p_4 = -a^2$

$\boxed{2}$ Pour la figure, tracer le segment [AB] horizontal avec A à gauche de B.

Placer I en marquant le codage.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{IB}} = -\frac{a^2}{4}$; $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BJ}} = 2a^2$

Solution détaillée :

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ sont colinéaires de même sens

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} &= AB\times AI\\ &= a\times\frac{a}{2}\\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraires.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} &= -IA\times IB\\ &= -\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\\ &= -\frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

J est le symétrique A par rapport à B donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires de même sens.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ} &= BA\times BJ\\ &= a\times 2a\\ &= 2a^2\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ On utilise la méthode du projeté orthogonal.
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=8$

Solutions détaillée :

ABC est un triangle isocèle en A et I est le milieu de $[BC]$.
Donc I est aussi le pied de la hauteur issue de A.
Par conséquent, I est le projeté orthogonal de A sur (BC).
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens (car I est le milieu de [BC]) donc
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BI\times BC=2\times 4=8$

$\boxed{4}$ $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$

Solution détaillée :

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

D'où $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{12}{4\times 6}$

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}$

La mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est comprise entre 0 et π.

Donc $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{3}$ (car $\frac{\pi}{3}$ est le seul nombre compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à $\frac{1}{2}$).

$\boxed{5}$ On calcule $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ en décomposant les vecteurs. On montre que ce produit scalaire est nul.

Solution détaillée :

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)$ (on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs)

$=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}}_{0}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{DA}+\underbrace{\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI}}_{0}$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux — car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux

$=AB\times AI-BJ\times DA$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens — car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de sens contraires

$=\frac{a}{2}\times a-\frac{a}{2}\times a$
$=0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux.
Par suite, (AJ) $\perp$ (DI).

$\boxed{6}$ $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{6}$.
Solution détaillée :

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2\\ &= \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ &= \left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2\\ &= 1^2+2\times(-2)+3^2\\ &= 1-4+9\\ &= 6\end{aligned}$$

Donc $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\sqrt{6}$.

$\boxed{7}$ On traduit l'orthogonalité des deux vecteurs en disant que le produit scalaire est nul.
On trouve : $k=-3$.

Solution détaillée :

$\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(2\vec{u}+k\vec{v}\right)=0$

si et seulement si $\vec{u}\bullet\left(2\vec{u}\right)+k\vec{u}\bullet\vec{v}+2\vec{u}\bullet\vec{v}+k\vec{v}^{2}=0$

si et seulement si $2\vec{u}^{2}+k\vec{u}\bullet\vec{v}+2\vec{u}\bullet\vec{v}+k\vec{v}^{2}=0$

si et seulement si $2\times25+2k+4+16k=0$

si et seulement si $18k=-54$

si et seulement si $k=-3$

$\boxed{8}$ **Solution détaillée**

Pour la figure, on prendra le segment [AB] « horizontal », le point A « à gauche » de B et C « au-dessus » de la droite (AB).

Le point D est le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

Donc $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{AB}$

$=AD\times AB$ car les vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

On sait que $C\in\mathcal{C}$ et que le segment [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$, donc le triangle ABC est rectangle en C.

On en déduit que C est le projeté orthogonal de B sur (AE).

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AE}$

$=AC\times AE$ car les vecteur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens.

On a donc $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AB}=AD\times AB=AE\times AC$.

On en déduit que $AD\times AB=AE\times AC$.

$\boxed{9}$ $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=b^2-a^2$

Détail :

$\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

On utilise l'égalité du parallélogramme $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2$ (On applique l'identité remarquable scalaire $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$)

$=AD^2-AB^2$

$=b^2-a^2$

$\boxed{10}$ Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle $\widehat{BAD}$ aigu).

Idée : $AC^2+BD^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2+\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2=...$

On développe en utilisant les identités remarquables scalaires.

$AC^2+BD^2=\overrightarrow{AB}^2+\cancel{2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}^2-\cancel{2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{AD}^2=2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}^2=2AB^2+2AD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$

$\boxed{11}$ Par égalité de position, on a : $\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$; on calcule $\overrightarrow{AG}^2$; on trouve : $AG=a\sqrt{19}$.

Solution détaillée :

$\overrightarrow{AG}=3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}^2=\left(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)^2$

$=9\overrightarrow{AB}^2+2\times\left[\left(3\overrightarrow{AB}\right)\bullet\left(2\overrightarrow{AC}\right)\right]+4\overrightarrow{AC}^2$

$=9AB^2+12\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+4AC^2$

$=9AB^2+12\times AB\times AC\times\cos\dfrac{\pi}{3}+4AC^2$

$=9a^2+12a^2\times\dfrac{1}{2}+4a^2$

$=19a^2$

Donc : $AG=a\sqrt{19}$.

Solution tentante mais complètement fausse :

$\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|3\,\overrightarrow{AB}+2\,\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|3\,\overrightarrow{AB}\right\|+\left\|2\,\overrightarrow{AC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|+2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=3a+2a=5a$

En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|\neq\left\|\vec{u}\right\|+\left\|\vec{v}\right\|$.

$\boxed{12}$ On fait trois étapes.

Soit G le centre de gravité de ABC.

On réduit la somme vectorielle en un seul vecteur.

L'ensemble E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par G.

1ère partie : réduction de la somme vectorielle

Soit G le centre de gravité de ABC.

On sait que G est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ; 1).

Donc d'après la relation fondamentale,

$\forall M\in P\quad \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

2e partie : chaîne d'équivalences

$M\in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0$

si et seulement si $\left(3\overrightarrow{MG}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0$

si et seulement si $3\left(\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{AB}\right)=0$ (on applique la règle du cours : $\left(k\vec{u}\right)\bullet\vec{v}=k\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$)

si et seulement si $\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

E est la droite passant par G et qui est perpendiculaire à (AB).

$\boxed{13}$ L'ensemble E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

Solution détaillée :

On rédige par chaîne d'équivalences.

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

On peut aussi dire que E est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On fait une figure et on trace l'ensemble E en rouge.

$\boxed{14}$ L'ensemble E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Solution détaillée :

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{AB}^2$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BM}}$

E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

On fait une figure et on trace l'ensemble E en rouge.

$\boxed{15}$ **Solution détaillée :**

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\mathrm{MA}^2 - 4\mathrm{MB}^2 = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - 4\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 = 0$

si et seulement si $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \bullet \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0$

On note I le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; –2).
On note J le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).

D'après la relation fondamentale,
$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{MI}}$
$\forall \mathrm{M} \in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = -\overrightarrow{\mathrm{MJ}}$

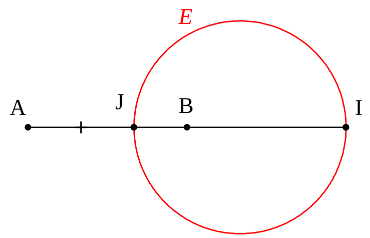
$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\left(3\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) \bullet \left(-\overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right) = 0$

si et seulement si $-3\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MJ}} = 0$

L'ensemble E est le cercle de diamètre [IJ].

$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (I est donc le symétrique de A par rapport à B) et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Pour construire E, on place le milieu de [IJ].

Travail personnel

Séquence bac (Nouvelle édition)

Pages 289 et 290 Tous les exercices

Contrôle continu
p.279 exercices 2, 3 et 4
p.280 exercices 6 et 7
p.281 exercices 10 et 11
Fabriquer un énoncé à mettre dans les exercices sur les projetés orthogonaux (éventuellement en fabriquant un similaire).

Fiche sur le produit scalaire dans le plan

Notations
On note P l'ensemble des points du plan.
$\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs du plan.
Une unité de longueur est fixée.

I. Définition et conséquences immédiates

1°) Définition (expression trigonométrique)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{P}$.

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls}\\ 0 & \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0}\end{cases}$$

2°) Cas particulier

A, B, C sont trois points quelconques de P tels que $A\neq B$ et $A\neq C$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}}$$

3°) P.S. de 2 vecteurs colinéaires

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{cases}\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de même sens}\\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de sens contraire}\end{cases}$$

4°) Signe du P.S.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques **non nuls** de $\vec{P}$.

- $\vec{u}\bullet\vec{v}>0 \iff \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ **est aigu**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}<0 \iff \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ **est obtus**
- $\vec{u}\bullet\vec{v}=0 \iff \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ **est droit**

II. Carré scalaire d'un vecteur

1°) Définition

$$\boxed{\vec{u}^{\,2}=\vec{u}\bullet\vec{u}=\|\vec{u}\|^2}$$

2°) Cas particulier

$$\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$$

III. Vecteurs orthogonaux

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{P}$ sont **orthogonaux** (on note $\vec{u}\perp\vec{v}$**)** pour exprimer que
- soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{2}$;
- soit $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

2°) Propriété

$$\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=0}$$

3°) Lieux d'orthogonalité de référence dans le plan

Ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CM}=0$ où A, B, C sont trois points tels que $A\neq B$:
droite perpendiculaire à (AB) passant par C

Ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$ où A et B sont deux points tels que $A\neq B$:
cercle de diamètre de diamètre $[AB]$.

IV. Expression du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal

1°) Propriété

A, B, C sont trois points quelconques de P tels que $A\neq C$.
On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{AC}$.

2°) Généralisation

A, B, C, D sont quatre points quelconques de P tels $A\neq B$ et $C\neq D$.
On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{HK}$.

V. Propriétés du produit scalaire

1°) Propriétés fondamentales (symétrie et bilinéarité du produit scalaire)

P_1 : $\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{P}^2\quad \vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}$.

P_2 : $\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{P}^2\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \vec{u}\bullet\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)$

P_3 : $\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in\vec{P}^3\quad \vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$

2°) Conséquence sur les développements scalaires doubles

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u}',\vec{v}'\right)\in\vec{P}^4\quad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}'+\vec{v}'\right)=\vec{u}\bullet\vec{u}'+\vec{u}\bullet\vec{v}'+\vec{v}\bullet\vec{u}'+\vec{v}\bullet\vec{v}'$$

3°) Identités remarquables scalaires

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{P}^2\quad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}^2$$

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{P}^2\quad \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}^2$$

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in\vec{P}^2\quad \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

Bilan des méthodes de calcul d'un produit scalaire

P.S. de 2 vecteurs

Expression trigonométrique avec le cosinus
(cas particuliers
- vecteurs colinéaires + ou – le produit des normes
- vecteurs orthogonaux : 0)

Projeté orthogonal

Décomposition de vecteurs

Calcul dans un repère orthonormé
$\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'$