$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les calculs de limites

1 Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ en décomposant chaque fois (veiller à la présentation avec accolade). Il faut faire les deux limites : il faut faire la limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

1°) $f(x)=5-\dfrac{1}{x}$ 2°) $f(x)=3+\dfrac{2}{x^2}$ 3°) $f(x)=-x^2+3$ 4°) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$

Modèle de rédaction pour le 1°) :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5)=\ldots\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\ldots\end{array}\right\}\text{donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots.$$

2 Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ (sans modifier l'écriture de $f(x)$).

1°) $f(x)=3x^2\left(5-\dfrac{1}{x}\right)$ 2°) $f(x)=(5-2x)(3x+2)$ 3°) $f(x)=\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

3 Dans chaque cas, étudier la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1°) $f(x)=\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-3+\dfrac{5}{x}}$ 2°) $f(x)=\dfrac{4}{3x+1}$ 3°) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

4 Dans chaque cas, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x\xrightarrow[x>0]{}0$ puis lorsque $x\xrightarrow[x<0]{}0$ (on dit aussi lorsque $x\longrightarrow 0^+$ et $x\longrightarrow 0^-$).

1°) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ 2°) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 3°) $f(x)=2+\dfrac{3}{x^2}$.

5 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ dont on ne connaît pas l'expression mais dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variations de f		↗	3	↘	‖	↗	

On donne également les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
Recopier et compléter le tableau de variation à l'aide de ces limites.

6 On considère la fonction $f : x\mapsto \dfrac{x^2-2}{x-1}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-2\right)$ et $\lim\limits_{x\to1}(x-1)$.
3°) Faire le tableau de signes de $x-1$.
4°) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

7 On considère la fonction $f : x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Faire le tableau de signe de x^2+x-6.
3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.

8 On considère la fonction f définie par $f(x)=-5x^3+3x^2+x-2$.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

9 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

10 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+7}$.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

11 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3-x+5}{3x^2-2x+1}$.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

12 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-x^2+3x+1}$.
Etudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.

Réponses

1 1°) $f(x)=5-\dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5)=5\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5.$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$

2°) $f(x)=3+\dfrac{2}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(3)=3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}\right)=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3.$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

3°) $f(x) = -x^2 + 3$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3) = 3\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4°) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\boxed{2}$ 1°) $f(x) = 3x^2\left(5 - \dfrac{1}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(5 - \dfrac{1}{x}\right) = 5\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2°) $f(x) = (5-2x)(3x+2)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(5-2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3°) $f(x) = \left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right) = 1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

$\boxed{3}$ 1°) $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{3}{x}}{-3 + \dfrac{5}{x}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{3}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3 + \dfrac{5}{x}\right) = -3\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{2}{3}$.

2°) $f(x) = \dfrac{4}{3x+1}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(4) = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{4}$ **Rappel important :** $x \longrightarrow 0^+$ c'est la même chose que $x \xrightarrow[x>0]{} 0$ (de même $x \xrightarrow[x<0]{} 0$ et $x \longrightarrow 0^-$)

1°) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.

2°) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.

3°) $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}(2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{x^2} = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(2)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.

$\boxed{5}$ On complète le tableau de variation avec les limites.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

$\boxed{6}$ 1°) $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2°) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)=-1$; $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$.

3°) Tableau de signes de $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	

4°) Déterminons $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2)=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2)=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0^-\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$

$\boxed{7}$ 1°) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+x-6\neq 0$.

Considérons le polynôme x^2+x-6.

Ce polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=2$ (racine évidente) et $x_2=-3$ (obtenue par produit).

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\,;-3\}$

2°) On applique la règle du signe d'un polynôme du second degré.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Signe de x^2+x-6		$-$	0		0	$+$	

3°) Déterminons $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+x-6)=0^+\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+x-6)=0^-\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

$\boxed{8}$ $f(x)=-5x^3+3x^2+x-2$ ($\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$)

f est une fonction polynôme non nulle ; on applique la règle du monôme de plus haut degré (car on étudie la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$ et $-\infty$).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-5x^3)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-5x^3)=+\infty$$

$\boxed{9}$ $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$ ($\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$)

f est une fonction rationnelle non nulle on applique la règle du quotient des monômes de plus haut degré (car on étudie la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$ et $-\infty$).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}3=3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}3=3$$

$\boxed{10}$ $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+7}$ ($\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$)

f est une fonction rationnelle non nulle on applique la règle du quotient des monômes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}2=2$$

$\boxed{11}$ $f(x)=\dfrac{x^3-x+5}{3x^2-2x+1}$ ($\boldsymbol{D}_f$ = ? ; inutile de le chercher dans ce cas)

f est une fonction rationnelle non nulle on applique la règle du quotient des monômes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{3}\right)=-\infty$$

$\boxed{12}$ $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3-x^2+3x+1}$ ($\boldsymbol{D}_f$ = ? ; inutile de le chercher dans ce cas)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Rappel **Limites de référence**

n est un entier naturel non nul.

1°) Règle 1

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x^n\right)=+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right)=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6 \dots)\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\dots)\end{cases}$$

2°) Règle 2

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty}$$

3°) Règle 3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

4°) Règle 4

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{si } n \text{ est pair } (2, 4, 6 \dots)\\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair } (1, 3, 5\dots)\end{cases}$$

5°) Règle 5 (limite d'une fonction constante)

k est un réel fixé

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} k=k}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} k=k}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} k=k} \quad \left(a\in\mathbb{R}\right)$$