

# 1<sup>ère</sup> S Exercices sur les dérivées des fonctions de référence

1 Dans chaque cas, donner la dérivée de la fonction.

On se contentera d'écrire  $f'(x) = \dots$

1°)  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 10$ .

2°)  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^6$ .

3°)  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

2 On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) Donner la fonction dérivée de  $f$ .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse 1.

On rédigera ainsi :

« L'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point A s'écrit  $y = \dots$  ».

3°) Tracer  $\mathcal{C}$  et  $T$  sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

Pour le tracé de  $T$ , on pourra utiliser le point A et le coefficient directeur (l'équation réduite n'est pas forcément utile pour tracer une tangente).

3 On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) Donner la fonction dérivée de  $f$ .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse 1.

3°) Tracer  $\mathcal{C}$  et  $T$  sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

4 On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) Donner la fonction dérivée de  $f$ .

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse 1.

3°) Tracer  $\mathcal{C}$  et  $T$  sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

5 On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) Donner la fonction dérivée de  $f$ .

2°) Déterminer en quels points la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente de coefficient directeur  $-\frac{1}{4}$ .

**Mise en garde** : l'équation réduite de la tangente ne sert à rien pour ce type d'exercice.

On rédigera ainsi la conclusion :

« La courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente de coefficient directeur  $-\frac{1}{4}$  aux points A(... ; ...) et B(... ; ...) ».

6 On considère la fonction  $f: x \mapsto x^3$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) Donner la fonction dérivée de  $f$ .

2°) Donner l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse 1.

3°) a) Développer et réduire l'expression  $d(x) = (x-1)^2(x+2)$ .

b) Etudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$  (faire un tableau).

4°) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  (unité : 1 cm) et la tangente  $T$  puis marquer le point B où  $T$  recoupe  $\mathcal{C}$ .

7 On considère la fonction  $f: x \mapsto x^2$  et l'on note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  (unité : 2 cm).

On pourra utiliser avec profit un logiciel de géométrie dynamique tel que *Geogebra*.

A l'aide du graphique, conjecturer s'il existe des tangentes à  $\mathcal{C}$  passant par le point  $A\left(\frac{1}{2}; -2\right)$  et leur nombre.

1°) Démontrer que l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en un point M d'abscisse  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) s'écrit  $y = 2ax - a^2$ .

2°) Déterminer pour quelles valeurs de  $a$  la tangente  $T$  passe le point A.

On rédigera ainsi : «  $A \in T$  si et seulement si ...  
si et seulement si ... »

(Il s'agit d'une chaîne d'équivalences).

3°) Ecrire les équations réduites des tangentes qui passent par A.

## Réponses

1 1°)  $f'(x) = 0$  ; 2°)  $f'(x) = 6x^5$  ; 3°)  $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ .

**Solution détaillée :**

1°)  $f$  étant une fonction constante, sa dérivée est la fonction constante nulle.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$

2°) On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type  $x \mapsto x^n$  où  $n$  est un entier naturel.

Ici,  $n = 6$ .

3°) On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  où  $n$  est un entier naturel.

Ici,  $n = 3$ .

Dans chaque cas, on dit que l'on a « dérivé » la fonction.

2 1°)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

2°)  $T$  a pour équation  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$  ;  $f'(1) = 2$

$T$  a donc pour équation  $y = 2(x-1) + 1$  soit  $y = 2x - 1$ .

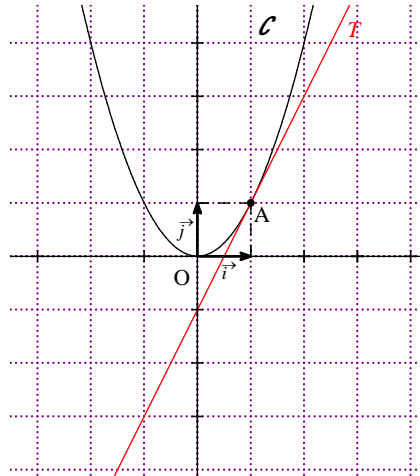
L'équation réduite de  $T$  s'écrit :  $y = 2x - 1$ .

3°) Pour le tracé, il y a deux méthodes :

**1<sup>ère</sup> méthode :** d'après l'équation réduite de  $T$  trouvée précédemment, on peut dire que  $T$  a pour ordonnée à l'origine  $-1$ . Comme  $T$  passe par le point A, on obtient le tracé de  $T$  très facilement.

**2<sup>e</sup> méthode :** on sait que  $T$  passe par A et a pour coefficient directeur 2. Cette méthode est meilleure que la précédente. Pour tracer une tangente, on a besoin que du coefficient directeur (on n'a pas besoin de l'équation réduite).

3°) Graphique



3 1°)  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

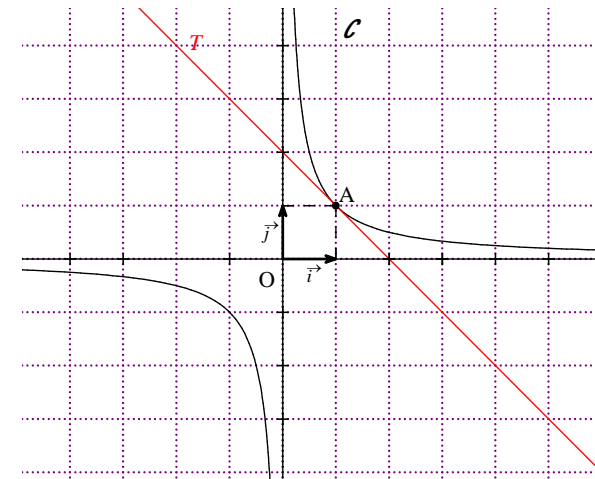
2°)  $T$  a pour équation  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$  ;  $f'(1) = -1$

$T$  a donc pour équation  $y = -(x-1) + 1$

L'équation réduite de  $T$  s'écrit :  $y = -x + 2$ .

3°) Graphique



4 1°)  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

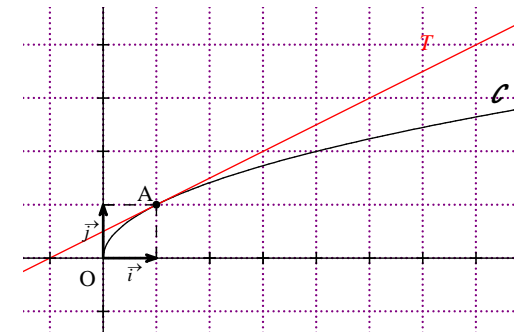
2°)  $T$  a pour équation  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$  ;  $f'(1) = \frac{1}{2}$

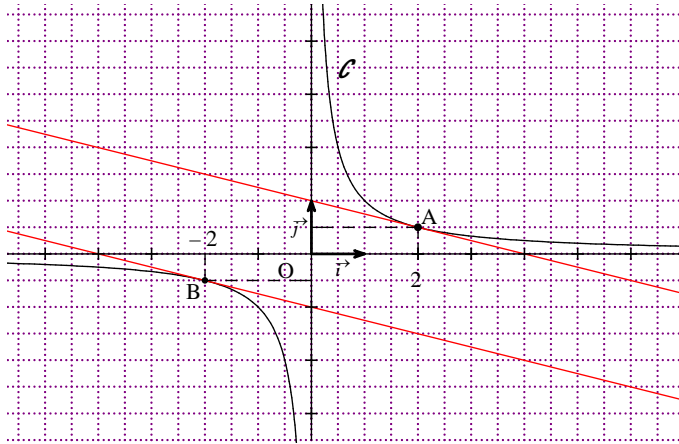
$T$  a donc pour équation  $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$  soit  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

L'équation réduite de  $T$  s'écrit :  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

3°) Graphique



5) 2°)  $\mathcal{C}$  admet une tangente de coefficient directeur  $-\frac{1}{4}$  aux points  $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$  et  $B\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$  d'abscisses respectives 2 et  $-2$ .



6) 1°)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$ .

2°) L'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse 1 s'écrit :  $y = 3x - 2$ .

3°) a)  $d(x) = x^3 - 3x + 2$ .

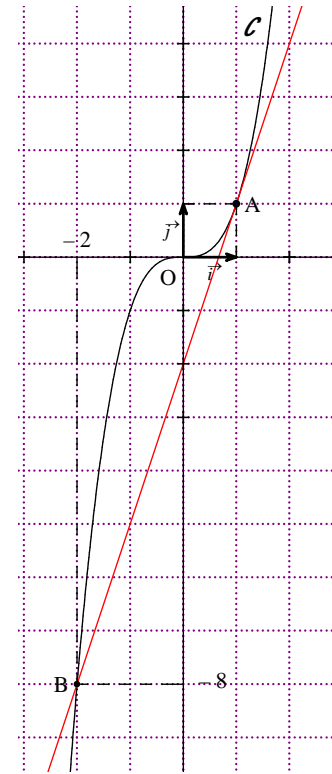
b) Etudions la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$ .

| $x$                | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|
| Signe de $(x-1)^2$ | +         | +    | 0   | +         |
| Signe de $(x+2)$   | -         | 0    | +   | +         |
| Signe de $d(x)$    | -         | 0    | 0   | +         |

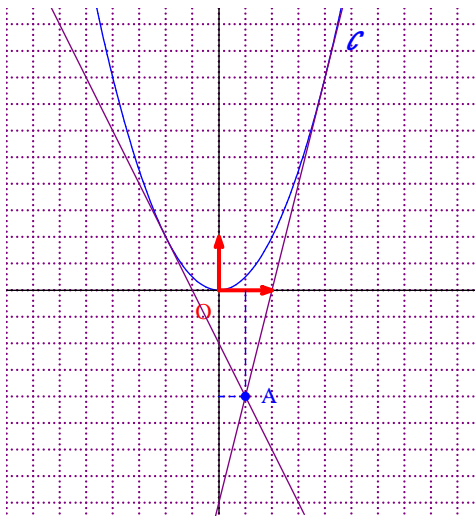
Positions relatives de  $\mathcal{C}$  et  $T$  :

- $\mathcal{C}$  est strictement au-dessus de  $T$  sur les intervalles  $]-2; 1[$  et  $]1; +\infty[$  ;
- $\mathcal{C}$  est strictement au-dessous de  $T$  sur l'intervalle  $] -\infty; -2[$  ;
- $\mathcal{C}$  et  $T$  sont sécantes aux points d'abscisses  $-2$  et  $1$ .

4°) Tracé



7) D'après le graphique, il semble qu'il y ait deux tangente à  $\mathcal{C}$  passant par le point  $A$ .



1°) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$ .

L'équation réduite de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  en un point  $M$  d'abscisse  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) s'écrit  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit  $y = 2a(x-a) + a^2$  soit  $y = 2ax - a^2$ .

2°)

$A \in T$  si et seulement si  $y_A = 2ax_A - a^2$

si et seulement si  $-2 = 2a \times \frac{1}{2} - a^2$

si et seulement si  $-2 = 2a \times \frac{1}{2} - a^2$

si et seulement si  $-2 = a - a^2$

si et seulement si  $a^2 - a - 2 = 0$

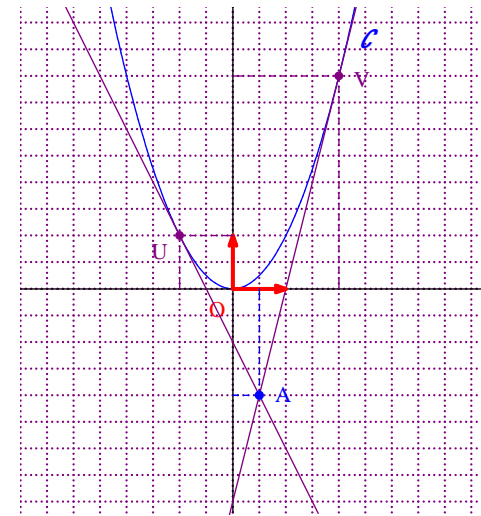
si et seulement si  $a = -1$  (racine évidente) ou  $a = 2$

3°) Les tangentes qui passent par  $A$  ont pour équations réduites :  $y = -2x - 1$  (tangente au point d'abscisse  $-1$ )

et  $y = 4x - 4$  (tangente au point d'abscisse  $2$ ).

On peut marquer les points de contact  $U$  et  $V$  des deux tangentes avec la courbe.

$U$  a pour abscisse  $-1$  et  $V$  a pour abscisse  $2$ .



## Commentaires

Dans les exercices **1** et **2**, les expressions « dérivée de la fonction » ou « fonction dérivée » sont synonymes.