$1^{\text{ère}}$ S

Exercices sur les calculs de dérivées

Consigne pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$:
Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction *f* définie par l'expression donnée.

$\boxed{1}$ **Formule** $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$

$f(x)=x-2$; $f(x)=\frac{3}{4}+x^2$; $f(x)=\frac{1}{x}+x$; $f(x)=x^6+x^4$; $f(x)=x^2+x-5$.

$\boxed{2}$ **Formule** $\boxed{(ku)'=ku'}$

$f(x)=3x$; $f(x)=\frac{3}{4}x^2$; $f(x)=-2x^3$; $f(x)=\frac{x^2}{10}$; $f(x)=\frac{3x}{5}$; $f(x)=-\frac{3}{x}$; $f(x)=-\frac{1}{2x}$; $f(x)=4\sqrt{x}$.

$\boxed{3}$ **Dérivées de fonctions polynômes ; utilisation des formules** $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$ **et** $\boxed{(ku)'=ku'}$

$f(x)=2x^2-x+3$; $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-1$; $f(x)=-x^2+3x-1$; $f(x)=2x-3$; $f(x)=x^4-3x^3+4x^2-\frac{1}{2}x+7$.

$\boxed{4}$ **Dérivée d'un produit** $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$

$f(x)=(3x^2-2x+7)(x-1)$ (ne pas développer $f(x)$ avant de dériver la fonction mais donner le résultat sous forme développée réduite)
$f(x)=(2x+1)\sqrt{x}$ (donner le résultat sous forme d'un seul quotient ; laisser la racine carrée au dénominateur).

$\boxed{5}$ **Dérivée de l'inverse d'une fonction ; utilisation de la formule** $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$ (ne pas développer le dénominateur dans le résultat).

$\boxed{6}$ **Dérivée d'un quotient (fonction rationnelle) ; utilisation de la formule** $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}$

$f(x)=\frac{3x-2}{x+3}$; $f(x)=\frac{x^2+2x-6}{x-1}$ (ne pas développer les dénominateurs dans les résultats).

$\boxed{7}$ **Dérivée de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule** $\boxed{(u^n)'=nu'u^{n-1}}$

$f(x)=(x^2-x+2)^2$; $f(x)=(x^3+5x^2-1)^5$ (ne pas développer les résultats)

$\boxed{8}$ **Dérivée de l'inverse de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule** $\boxed{\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}}$

$f(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}$; $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$

$\boxed{9}$ **Dérivée de fonctions utilisant des réécritures (**$\frac{k}{u}$ **et** $\frac{u}{k}$**)**

$f(x)=\frac{3}{x^2+2}$ (avant de dériver, faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=3\times...$; ne pas développer le dénominateur dans le résultat).

$f(x)=\frac{-x^2+3x+1}{3}$ (faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=\frac{1}{3}\times...$; ne pas développer le dénominateur).

$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}$ (ne pas modifier la forme pour dériver ; ne pas mettre le résultat au même dénominateur).

$f(x)=\frac{3}{(x^2-1)^4}$

$f(x)=\frac{1}{2(x-1)}$

$\boxed{10}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x)=2x^2+3x-1$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur 1.

On conclura ainsi :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point A(…. ; …..). »

3°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y=3x+5$.

$\boxed{11}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y=4x$.

$\boxed{12}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer *a*, *b*, *c* sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses suivantes

H_1 : $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère O.
H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1\,;\,-3)$.
H_3 : la tangente en O à $\mathcal{C}$ a pour équation réduite $y=-4x$.

13 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer *a*, *b*, *c*, *d* sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses suivantes.

H_1 : $\mathcal{C}$ coupe l'axe (O*y*) au point d'ordonnée 20.
H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(-1\ ;\ 18)$.
H_3 : $\mathcal{C}$ admet une tangente en A de coefficient directeur 3.
H_4 : $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

14 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{3x-2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer *a* et *b* sachant que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $A(0\ ;\ 1)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

15 On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{2x-1}$.
Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
Calculer $f'(x)$ en précisant le domaine de validité du calcul.

16 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A indiqué.

1°) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

2°) $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse –1.

3°) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 4.

4°) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Réponses

1 $f'(x)=1$; $f'(x)=2x$; $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$; $f'(x)=6x^5+4x^3$; $f(x)=2x+1$.

2 $f'(x)=3$; $f'(x)=\dfrac{3}{2}x$; $f'(x)=-6x^2$; $f'(x)=\dfrac{x}{5}$; $f'(x)=\dfrac{3}{5}$; $f'(x)=\dfrac{3}{x^2}$; $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2}$; $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3 $f'(x)=4x-1$; $f'(x)=3x^2+3x$; $f'(x)=-2x+3$; $f'(x)=2$; $f'(x)=4x^3-9x^2+8x-\dfrac{1}{2}$.

4 $f'(x)=(6x-2)(x-1)+\left(3x^2-2x+7\right)\times 1=9x^2-10x+9$; $f(x)=2\sqrt{x}+(2x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$.

5 $f'(x)=-\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

6 $f'(x)=\dfrac{11}{(x+3)^2}$; $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$

7 $f'(x)=2(2x-1)\left(x^2-x+2\right)$; $f'(x)=5\left(3x^2+10x\right)\left(x^3+5x^2-1\right)^4$

8 $f'(x)=-\dfrac{4}{(2x-1)^3}$; $f'(x)=-\dfrac{6x}{\left(x^2+1\right)^4}$

9 $f'(x)=-\dfrac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}$; $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{3}$;

On effectue la réécriture suivante : $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1}{x+1}+2\times\dfrac{1}{x+3}$; on dérive ensuite terme à terme.

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{(x+3)^2}$; $f(x)=-\dfrac{24x}{\left(x^2-1\right)^5}$; $f(x)=-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$.

10 1°) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=4x+3$

1°) On utilise la dérivée de *f*.

Méthode : dès qu'on a une tangente, on pense à la dérivée.

On résout l'équation $f'(x)=1$ (1).

On peut avoir un autre coefficient directeur 2, 3 … (suivant l'énoncé)

L'équation (1) est successivement équivalente à
$4x+3=1$
$x=-\dfrac{1}{2}$

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point A d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

Pour déterminer l'ordonnée du point A, on calcule $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}-1=-2$

Conclusion :

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point $A\left(-\dfrac{1}{2}\ ;-2\right)$.

3°) On résout l'équation $f'(x)=3$ (2).

L'équation (1) est successivement équivalente à
$4x+3=3$
$x=0$
$\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ au point B d'abscisse 0.
Pour déterminer l'ordonnée du point B, on calcule $f(0)=2\times 0^2+3\times 0-1=-1$

Conclusion :

$\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à Δ au point B(0 ; –1).

$\boxed{11}$ 2°) $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ aux points $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\ ;\ 2-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\ ;\ 2+2\sqrt{2}\right)$.

$\boxed{12}$ $a=1$; $b=-4$; $c=0$

Méthode : on prend les hypothèses les unes après les autres.
On peut aussi faire un système.

H1 : $f(0)=0$; H2 : $f(1)=-3$; H3 : $f'(0)=-4$

$\boxed{13}$ On traduit les hypothèses par : $f(0)=20$; $f(-1)=18$; $f'(-1)=3$.

On trouve : $a=-1$, $b=-3$, $c=0$, $d=20$.

$\boxed{14}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\quad f'(x)=\frac{3ax^2-4ax-3b}{(3x-2)^2}$.

D'après H_1, on a : $f(0)=1$.

D'après H_2, on a : $f'(1)=0$.

$a=6$; $b=-2$.

$\boxed{15}$ $\mathcal{D}_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

On applique la règle de dérivation d'une fonction de la forme $x\mapsto\sqrt{ax+b}$ où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

$$\left(\sqrt{ax+b}\right)'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

$\boxed{16}$ Dans chaque cas, on utilise la formule donnant l'équation de la tangente en un point d'abscisse a :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

1°) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-\frac{2x^2+10x+3}{(x^2+x+1)^2}$; $y=-\frac{5}{3}x+4$

2°) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$; $y=-x-\frac{1}{2}$

3°) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$; $y=\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}$

4°) $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$; $y=12x-8$.

Travail personnel

Séquence bac

Ancienne édition p.120 exercices 1 et 2

Contrôle continu

p. 106 exercices 1 (sauf 4°)), 2 (sauf 4°)), 3, 4 (sauf 1°) et 3°))
p.107 exercice 5

Indication : pour tous les calculs de dérivées, on peut vérifier les résultats à l'aide du logiciel *XCas*.

Formulaire récapitulatif

$f(x)=$	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)=$
k (k réel fixé)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
$k\times u$	$k\times u'$
$u\times v$	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}\ (u\neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}\ (v\neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$