$1^{\text{ère}}$ S — Exercices sur les dérivées des fonctions de référence

1 Dans chaque cas, donner la dérivée de la fonction.
On se contentera d'écrire $f'(x) = ...$

1°) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10$.

2°) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6$.

3°) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

2 On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Donner la fonction dérivée de f.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
On rédigera ainsi :
« L'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A s'écrit $y = ...$ ».
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm).
Pour le tracé de T, on pourra utiliser le point A et le coefficient directeur (l'équation réduite n'est pas forcément utile pour tracer une tangente).

3 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Donner la fonction dérivée de f.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

4 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Donner la fonction dérivée de f.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et T sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

5 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Donner la fonction dérivée de f.
2°) Déterminer en quels points la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$.

Mise en garde : l'équation réduite de la tangente ne sert à rien pour ce type d'exercice.

On rédigera ainsi la conclusion :
« La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$ aux points A(… ; …) et B(…. ; …..) ».

6 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Donner la fonction dérivée de f.
2°) Donner l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
3°) a) Développer et réduire l'expression $d(x) = (x-1)^2(x+2)$.
b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T (faire un tableau).
4°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité : 1 cm) et la tangente T puis marquer le point B où T recoupe $\mathcal{C}$.

7 On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité : 2 cm).
On pourra utiliser avec profit un logiciel de géométrie dynamique tel que *Geogebra*.
A l'aide du graphique, conjecturer s'il existe des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point $A\left(\dfrac{1}{2} ; -2\right)$ et leur nombre.

1°) Démontrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ en un point M d'abscisse a $(a \in \mathbb{R})$ s'écrit $y = 2ax - a^2$.

2°) Déterminer pour quelles valeurs de a la tangente T passe le point A.

On rédigera ainsi : « $A \in T$ si et seulement si ….
si et seulement si …. »

(Il s'agit d'une chaîne d'équivalences).

3°) Ecrire les équations réduites des tangentes qui passent par A.

Réponses

1 1°) $f'(x) = 0$; 2°) $f'(x) = 6x^5$; 3°) $f(x) = -\dfrac{3}{x^4}$.

Solution détaillée :

1°) f étant une fonction constante, sa dérivée est la fonction constante nulle.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$

2°) On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type $x \mapsto x^n$ où n est un entier naturel.
Ici, $n = 6$.

3°) On utilise la formule qui donne la dérivée des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ où n est un entier naturel.
Ici, $n = 3$.

$\boxed{2}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$

2°) T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$; $f'(1) = 2$

T a donc pour équation $y = 2(x-1)+1$ soit $y = 2x-1$.

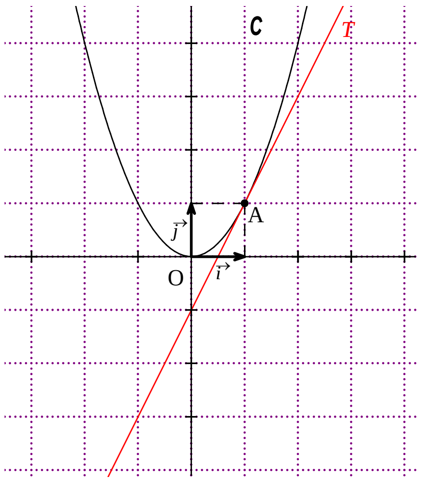
L'équation réduite de T s'écrit : $y = 2x-1$.

3°) Pour le tracé, il y a deux méthodes :

1ère méthode : d'après l'équation réduite de T trouvée précédemment, on peut dire que T a pour ordonnée à l'origine –1. Comme T passe par le point A, on obtient le tracé de T très facilement.

2e méthode : on sait que T passe par A et a pour coefficient directeur 2. Cette méthode est meilleure que la précédente. Pour tracer une tangente, on a besoin que du coefficient directeur (on n'a pas besoin de l'équation réduite).

3°) Graphique



$\boxed{3}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

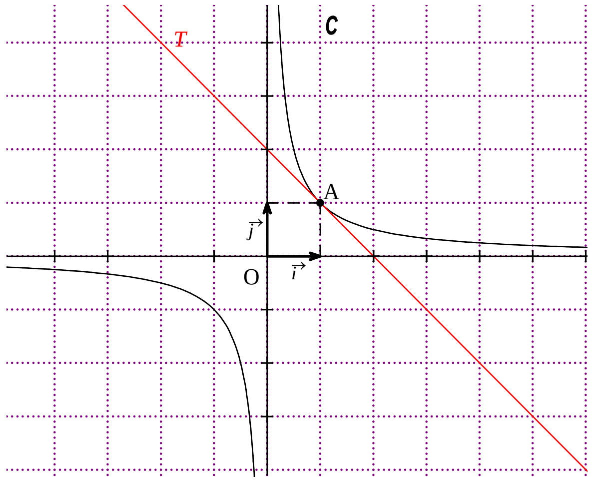
2°) T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$; $f'(1) = -1$

T a donc pour équation $y = -(x-1)+1$

L'équation réduite de T s'écrit : $y = -x+2$.

3°) Graphique



$\boxed{4}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

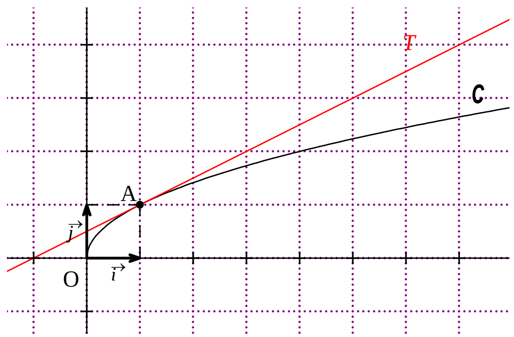
2°) T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$; $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

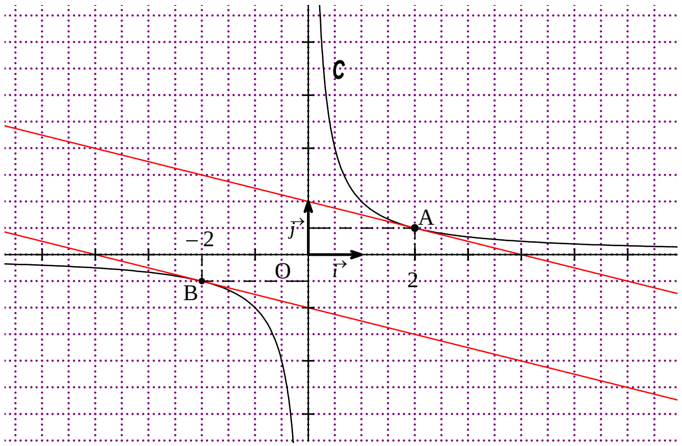
T a donc pour équation $y = \dfrac{1}{2}(x-1)+1$ soit $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

L'équation réduite de T s'écrit : $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

3°) Graphique



$\boxed{5}$ 2°) **C** admet une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{4}$ aux points $A\left(2\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(-2\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ d'abscisses respectives 2 et – 2.



$\boxed{6}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$.

2°) L'équation réduite de la tangente T à **C** au point A d'abscisse 1 s'écrit : $y = 3x - 2$.

3°) a) $d(x) = x^3 - 3x + 2$.

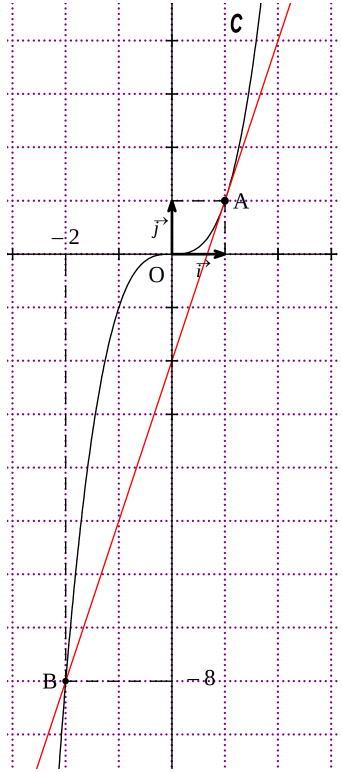
b) Etudions la position de **C** par rapport à T.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $(x-1)^2$		+		+	0	+	
Signe de $(x+2)$		–	0	+		+	
Signe de $d(x)$		–	0	+	0	+	

Positions relatives de **C** et T :

- **C** est strictement au-dessus de T sur les intervalles $]-2\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$;
- **C** est strictement au-dessous de T sur l'intervalle $]-\infty\,;-2[$;
- **C** et T sont sécantes aux points d'abscisses – 2 et 1.

4°) **Tracé**



$\boxed{7}$ D'après le graphique, il semble qu'il y ait deux tangente à **C** passant par le point A.

1°) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$.

L'équation réduite de la tangente T à **C** en un point M d'abscisse a $(a \in \mathbb{R})$ s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = 2a(x-a) + a^2$ soit $y = 2ax - a^2$.

2°)

$A \in T$ si et seulement si $y_A = 2ax_A - a^2$

si et seulement si $-2 = 2a \times \dfrac{1}{2} - a^2$

si et seulement si $-2 = 2a \times \dfrac{1}{2} - a^2$

si et seulement si $-2 = a - a^2$

si et seulement si $a^2 - a - 2 = 0$

si et seulement si $a = -1$ (racine évidente) ou $a = 2$

3°) Les tangentes qui passent par A ont pour équations réduites : $y = -2x - 1$ (tangente au point d'abscisse – 1) et $y = 4x - 4$ (tangente au point d'abscisse 2).