**TS3** **Devoir pour le lundi 8 mars 2010**

**I.** On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher.

L'urne $U_1$ contient *a* boules blanches et *b* boules noires ; l'urne $U_2$ contient *c* boules blanches et *d* boules noires.

On tire au hasard une boule dans $U_1$ ; on la met dans $U_2$, puis on tire au hasard une boule dans $U_2$ et on la met dans $U_1$.
L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1°) Faire un arbre de probabilité avec les événements
$B_1$ : « on a tiré une boule blanche dans l'urne $U_1$ » ;
$N_1$ : « on a tiré une boule noire dans l'urne $U_1$ » ;
$B_2$ : « on a tiré une boule blanche dans l'urne $U_2$ ».
$N_2$ : « on a tiré une boule noire dans l'urne $U_2$ ».

2°) Calculer la probabilité de l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ». Donner l'expression sous forme factorisée en fonction de *a*, *b*, *c*, *d*.

---

**II.** Dans un petit pays, un quart de la population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur 13 parmi les malades. La probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle est vaccinée à 0,1.

Calculer la probabilité pour une personne :
- de ne pas être vaccinée sachant qu'elle est malade ;
- d'être malade et vaccinée ;
- d'être malade et non vaccinée ;
- de tomber malade sachant qu'elle n'est pas vaccinée.

---

**III.** On sait que 3 % d'un grand nombre de pièces sont défectueuses. On les contrôle avec deux systèmes soit $S_1$, soit $S_2$.
Le système $S_1$ accepte 95 % des bonnes pièces et rejette 98 % des pièces défectueuses.
Le système $S_2$ accepte 97 % des pièces mais 1 % des pièces acceptées sont défectueuses.

Comparer la probabilité qu'il y ait une erreur avec chacun des deux systèmes. Commenter.

---

**IV.** On dispose de sacs de jetons $S_1$, $S_2 \ldots, S_n$ … tels que :

● le sac $S_1$ contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc ;

● chacun des suivants $S_2 \ldots, S_n$ …contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs, effectués de la façon suivante.

● **Première étape :** on tire au hasard un jeton dans $S_1$.

● **Deuxième étape :** on place le jeton tiré dans $S_1$ dans $S_2$, puis on tire, au hasard, un jeton dans $S_2$.

● **Troisième étape :** on place le jeton tiré dans $S_2$ dans $S_3$, puis on tire, au hasard, un jeton dans $S_3$ … et ainsi de suite…

On modélise l'expérience aléatoire par une loi de probabilité *P*.

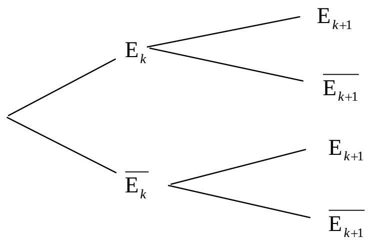
Pour tout entier $k \geq 1$, on note $E_k$ l'événement « le jeton sorti de $S_k$ est blanc » et on note $p_k$ sa probabilité.
**Il ne sert à rien de faire un arbre ; on fera un seul arbre dans la question 3°).**

1°) Donner la valeur de $p_1$.
2°) Compléter le tableau :

| |
|---|
| A l'étape *k*, si le jeton tiré dans le sac $S_k$ est blanc, alors le sac $S_{k+1}$ contient ……. jetons blancs et ………… jeton noir. |
| A l'étape *k*, si le jeton tiré dans le sac $S_k$ est noir, alors le sac $S_{k+1}$ contient ……. jeton blanc et ………… jetons noirs. |

En déduire, pour $k \geq 1$, les valeurs de $P_{E_k}\left(E_{k+1}\right)$ et $P_{\overline{E_k}}\left(E_{k+1}\right)$ (sans calcul).

3°) En écrivant $P\left(E_{k+1}\right) = P\left(E_k \cap E_{k+1}\right) + P\left(\overline{E}_k \cap E_{k+1}\right)$, exprimer $p_{k+1}$ en fonction de $p_k$.
On pourra s'aider de l'arbre de probabilité ci-dessous :




4°) Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $u_k = p_k - \dfrac{1}{2}$.

a) Calculer $u_1$.

b) Déterminer la nature de la suite $\left(u_k\right)$.

c) En déduire l'expression de $p_k$ en fonction de *k* pour $k \geq 1$

d) Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

**Reprendre l'exercice en supposant que** les sacs de jetons $S_1$, $S_2 \ldots, S_n$ …sont tels que :

● le sac $S_1$ contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs

● chacun des suivants contient 2 jetons noirs et 2 jetons blancs.

---

**V.** On se propose de résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$ (E).

1°) Soit *g* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right) = e^{2x} g\left(x\right)$.

a) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'\left(x\right)$.

b) Démontrer que *f* est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel *x*, on a : $g'\left(x\right) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

On s'efforcera de démontrer cette équivalence le plus proprement possible.
2°) En déduire toutes les solutions de (E).

**TS3**

# Correction du devoir pour le 8 mars 2010

**I.** 1°) Arbre de probabilité avec les événements

2°) L'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ si on a tiré une boule blanche dans l'urne $U_1$ et une boule blanche dans l'urne $U_2$ ou une boule noire dans l'urne $U_1$ et une boule noire dans l'urne $U_2$.

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{N_1} \cap \mathrm{N_2}) + P(\mathrm{B_1} \cap \mathrm{B_2})$$

$$P(\mathrm{A}) = \frac{a}{a+b} \times \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \times \frac{d+1}{c+d+1} = \frac{a(c+1)+b(d+1)}{(a+b)(c+d+1)}$$

---

**II.** On note V l'événement « la personne est vaccinée » et M l'événement « la personne est malade ».

$x_0 + h$

$P(\mathrm{V}) = \frac{1}{4}$ ; $P(\mathrm{V/M}) = \frac{1}{13}$ ; $P(\mathrm{M/V}) = 0{,}1$.

1°) On a : $P(\mathrm{V/M}) + P(\overline{\mathrm{V}}/\mathrm{M}) = 1$ donc $\frac{1}{13} + P(\overline{\mathrm{V}}/\mathrm{M}) = 1$ donc $P(\overline{\mathrm{V}}/\mathrm{M}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

2°) D'après la formule des probabilités composées, on a : $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) = P(\mathrm{V}) \times P(\mathrm{M/V}) = \frac{1}{4} \times 0{,}1 = 0{,}025$.

3°) D'après la formule des probabilités composées, on a : $P(\mathrm{M}) \times P(\mathrm{V/M}) = P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$.

Donc $P(\mathrm{M}) = \frac{P(\mathrm{V} \cap \mathrm{M})}{P(\mathrm{V/M})} = \frac{0{,}025}{\frac{1}{13}} = 13 \times 0{,}025 = 0{,}325$

On peut ensuite écrire au choix :

1) $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V}) + P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = P(\mathrm{M})$ donc $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = P(\mathrm{M}) - P(\mathrm{M} \cap \mathrm{V})$

ou

2) $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}}) = P(\mathrm{M}) \times P(\overline{\mathrm{V}} / \mathrm{M}) = 0{,}325 \times \frac{12}{13} = 0{,}3$

4°) $P(\mathrm{M} / \overline{\mathrm{V}}) = \frac{P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{V}})}{P(\overline{\mathrm{V}})} = \frac{0{,}3}{\frac{3}{4}} = 0{,}4$

---

**III.** Il y a une erreur de contrôle lorsque la pièce est bonne et n'est pas acceptée ou lorsque la pièce est défectueuse et est acceptée.

1°) Avec le système $S_1$, la probabilité qu'il y ait une erreur est égale à 0,0491.
2°) Avec le système $S_2$, la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est plus difficile à déterminer.

$P(\mathrm{D}) = 0{,}03$ ; $P(\mathrm{A}) = 0{,}97$ ; $P(\mathrm{D/A}) = 0{,}01$ ;

$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{D/A}) = 0{,}0097$

$P(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{A}}) = 0{,}03 \times 0{,}98 = 0{,}0294$

$P(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{A}}) = P(\overline{\mathrm{A}}) - P(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{A}}) = 0{,}03 - 0{,}0294 = 0{,}0006$

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle avec le système $S_2$ est égale à :

$P(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) + P(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{A}}) = 0{,}0097 + 0{,}0006 = 0{,}0103$

Le système de contrôle $S_2$ est donc plus fiable que le système de contrôle $S_1$.

---

**IV.**

1°) On a : $p_1 = \frac{1}{3}$.

2°)

| |
|---|
| A l'étape $k$, si le jeton tiré dans le sac $S_k$ est blanc, alors le sac $S_{k+1}$ contient 2 jetons blancs et 1 jeton noir. |
| A l'étape $k$, si le jeton tiré dans le sac $S_k$ est noir, alors le sac $S_{k+1}$ contient 1 jeton blanc et 2 jetons noirs. |

On en déduit que : $P_{\mathrm{E}_k}(\mathrm{E}_{k+1}) = \frac{2}{3}$ et $P_{\overline{\mathrm{E}_k}}(\mathrm{E}_{k+1}) = \frac{1}{3}$.

3°) $\mathrm{E}_k$ et $\overline{\mathrm{E}}_k$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}_{k+1}) &= P(\mathrm{E}_k \cap \mathrm{E}_{k+1}) + P(\overline{\mathrm{E}}_k \cap \mathrm{E}_{k+1}) \\ &= \frac{2}{3}P(\mathrm{E}_k) + \frac{1}{3}P(\overline{\mathrm{E}}_k) \\ &= \frac{2}{3}P(\mathrm{E}_k) + \frac{1}{3}\left[1 - P(\mathrm{E}_k)\right] \\ &= \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k). \end{aligned}$$

On en déduit que $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

4°) a) $u_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

b) Pour tout $k \geq 1$, on a : $u_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}u_k$.

On en déduit que la suite $(u_k)$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

c) Pour tout $k \geq 1$, on a : $u_k = u_1 \times q^{k-1} = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

Pour tout $k \geq 1$, on a : $u_k = p_k - \frac{1}{2}$ d'où : $p_k = u_k + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}$.

d) On a : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k = \frac{1}{2}$.

Lorsque $k$ tend vers $+\infty$, la probabilité de tirer une boule une boule blanche dans le sac $S_k$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Avec la reprise : $p_1 = \frac{2}{5}$ et $p_{k+1} = \frac{1}{5}p_k + \frac{2}{5}$ ; dans ce cas, on retrouve également, $\lim\limits_{k \to +\infty} p_k = \frac{1}{2}$.

---

**V.** 1°) a) $f$ est le produit de la fonction $x \mapsto e^{2x}$ par la fonction $g$.
Toutes les deux sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

b) $f$ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel $x$, $f'(x) - 2f(x) = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

si, et seulement si, pour tout réel $x$, $\cancel{2e^{2x}g(x)} + e^{2x}g'(x) \cancel{-2e^{2x}g(x)} = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

si, et seulement si, pour tout réel $x$, $e^{2x}g'(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

si, et seulement si, pour tout réel $x$, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

2°) Les primitives de la fonction $u : x \mapsto \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ sont les fonctions $U$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$U(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sont les fonction $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}\left(\ln\left(1+e^{-2x}\right)+k\right)$ avec $k \in \mathbb{R}$.