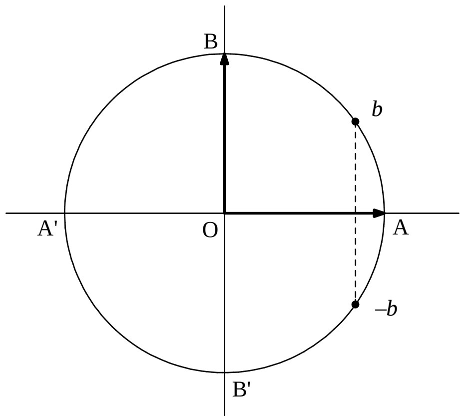
**1$^{\text{ère}}$ S**
**Chapitre 30**

# Equations et inéquations trigonométriques avec des cosinus et des sinus

## I. Règles fondamentales

### 1°) Egalité de deux cosinus

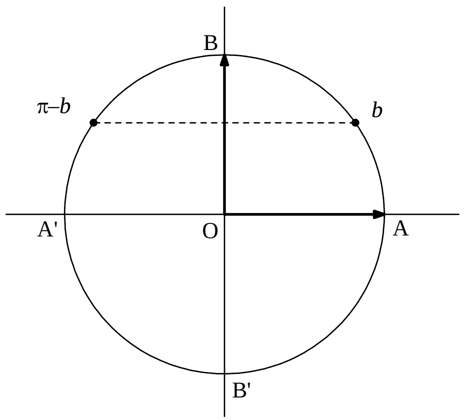
$a$ et $b$ sont deux réels.




| | |
|---|---|
| **cos $a$ = cos $b$ si et seulement si** | $\begin{cases} a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ |

### 2°) Egalité de deux sinus

$a$ et $b$ sont deux réels.




| | |
|---|---|
| **sin $a$ = sin $b$ si et seulement si** | $\begin{cases} a = b + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ |



## II. Exemples de résolutions d'équations trigonométriques

### 1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ (1).

**Astuce de départ :**

$\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

**Réécriture de l'équation**

(1) s'écrit $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}$ (« on équilibre l'équation »)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (on « enlève » les cos avec la règle 1)

$$\boxed{S_1 = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}}$$

### 2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\underbrace{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}_{\text{ne pas développer}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2).

**Astuce de départ :**

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

**Réécriture de l'équation**

(2) s'écrit $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\Leftrightarrow$ $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\frac{5\pi}{12}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S_2=\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

**3°) Exemple 3**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x=\sin x$ (3).

**Astuce de départ :**

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

**Réécriture de l'équation**

(3) s'écrit $\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(3) $\Leftrightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 3x=-\frac{\pi}{2}+x+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

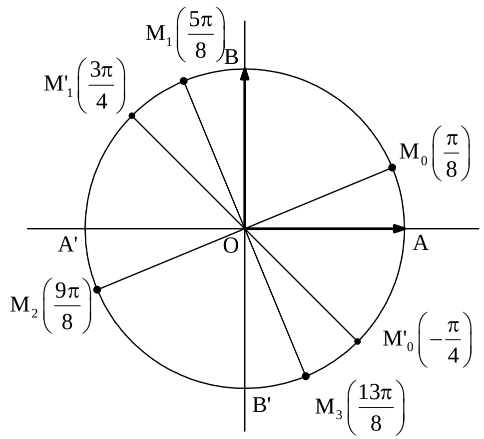
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k'\pi}{2} \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S_3=\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$




| 1$^{\text{ère}}$ famille (points rouges) | 2$^{\text{e}}$ famille (points verts) |
|---|---|
| $k=0$ : $\frac{\pi}{8}$<br>$k=1$ : $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$<br>$k=2$ : $\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$<br>$k=3$ : $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{8}$ | $k'=0$ : $-\frac{\pi}{4}$<br>$k'=1$ : $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$ |

## III. Equations trigonométriques particulières

### 1°) Règles

**Par lecture du cercle trigonométrique, on obtient dans chaque cas une seule famille de solutions.**

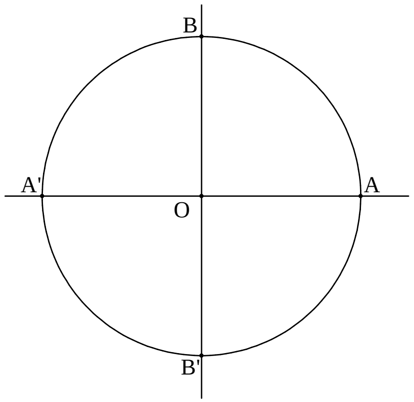
$$\boxed{\begin{array}{l}
\cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\cos x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\sin x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\sin x = -1 \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{array}}$$

### 2°) Justification

**Donner 6 cercles trigonométriques**

**● Equation $\cos x = 1$**

Les solutions ont pour point image A.

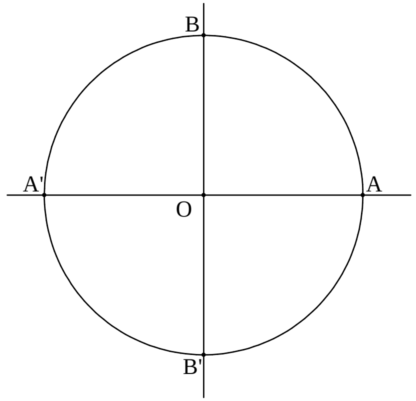



Les solutions sont les nombres 0, $2\pi$, $4\pi$, $-2\pi$, $-4\pi$ ...
Il s'agit des nombres de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



**● Equation $\cos x = -1$**

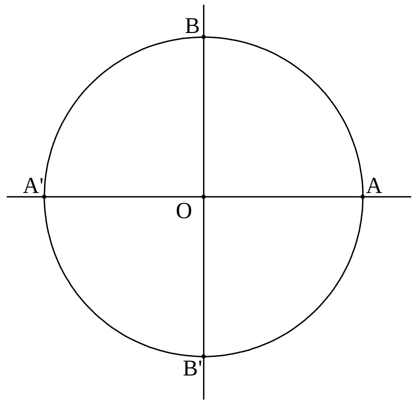
Les solutions ont pour point image A'.




Les solutions sont les nombres $\pi$, $3\pi$, $-\pi$, $-3\pi$ ...
Il s'agit des nombres de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Equation $\cos x = 0$**

Les solutions ont pour points images B et B'.

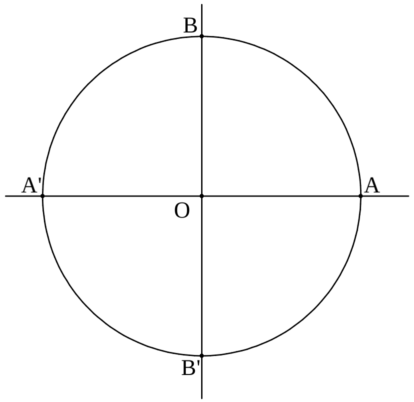



Les solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Equation $\sin x = 1$**

Les solutions ont pour point image B.

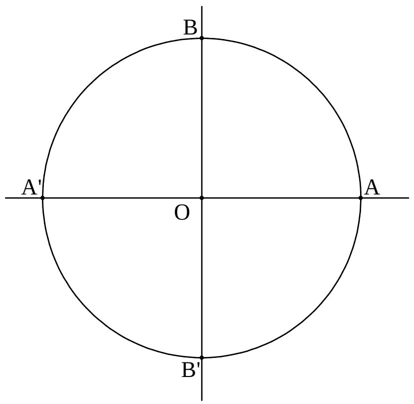



Les solutions sont les nombres $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$, $\frac{\pi}{2}-4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**● Equation $\sin x = -1$**

Les solutions ont pour point image B'.



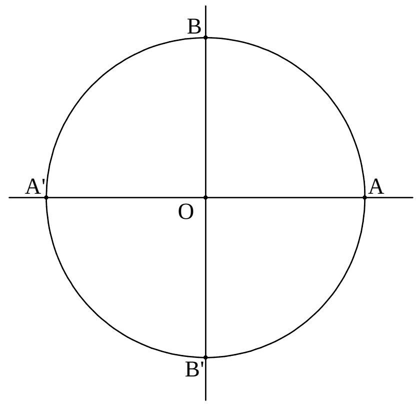

Les solutions sont les nombres $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi$, $-\frac{\pi}{2}+4\pi$, $-\frac{\pi}{2}-2\pi$, $-\frac{\pi}{2}-4\pi$ ...

Il s'agit des nombres de la forme $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



**● Equation $\sin x = 0$**

Les solutions ont pour points images A et A'.




Les solutions sont les nombres 0, π, 2π, 3π, 4π, – π, – 2π, – 3π, – 4π ...
Il s'agit des nombres de la forme $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

## IV. Résolution d'une équation trigonométrique dans un intervalle donné (exemple)

Résoudre dans [0 ; 4π] l'équation $\cos 2x = \frac{1}{2}$ (1).

**1ère étape :**

On résout l'équation dans $\mathbb{R}$.

**Astuce de départ :**

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**$2^e$ étape :**

On cherche les solutions dans $[0\ ;\ 4\pi]$

| **$1^{ère}$ famille** | **$2^e$ famille** |
|---|---|
| On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que :<br>$0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 4\pi$    $: \pi \ (\pi > 0)$<br>$0 \leq \frac{1}{6} + k \leq 4$    $+\left(-\frac{1}{6}\right)$<br>$-\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{23}{6}$<br><br>$-\frac{1}{6} = -0{,}166...$<br>$\frac{23}{6} = 3{,}833...$<br><br>$k \in \mathbb{Z}$<br><br>Donc<br>$k = 0$<br>ou<br>$k = 1$<br>ou<br>$k = 2$<br>ou<br>$k = 3$ | On cherche $k' \in \mathbb{Z}$ tel que :<br>$0 \leq -\frac{\pi}{6} + k'\pi \leq 4\pi$    $: \pi \ (\pi > 0)$<br>$0 \leq -\frac{1}{6} + k' \leq 4$    $+\frac{1}{6}$<br>$\frac{1}{6} \leq k' \leq \frac{25}{6}$<br><br>$\frac{1}{6} = 0{,}166...$<br>$\frac{25}{6} = 4{,}1666...$<br><br>$k' \in \mathbb{Z}$<br><br>Donc<br>$k' = 1$<br>ou<br>$k' = 2$<br>ou<br>$k' = 3$<br>ou<br>$k' = 4$ |

On donne l'ensemble des solutions dans $[0\ ;\ 4\pi]$.

$$\boxed{S_{[0\,;\,4\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{11\pi}{6}\ ;\ \frac{13\pi}{6}\ ;\ \frac{17\pi}{6}\ ;\ \frac{19\pi}{6}\ ;\ \frac{23\pi}{6}\right\}}$$



## V. Inéquations trigonométriques

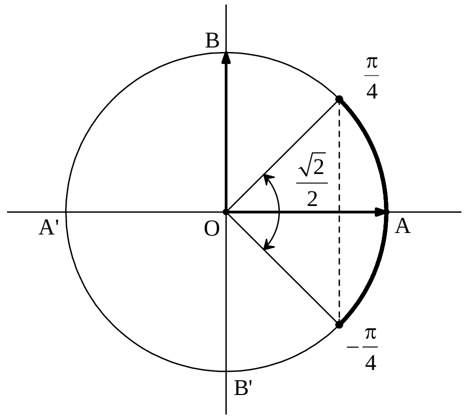
### 1°) Remarques préliminaires

- Il n'y a pas de règle.
- On utilise le cercle trigonométrique.

### 2°) Exemples

**● Exemple 1**

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.




D'après le cercle trigonométrique : $S = \left[-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

**● Exemple 2**

Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin 2x \geq \frac{1}{2}$.

**$1^{ère}$ étape**

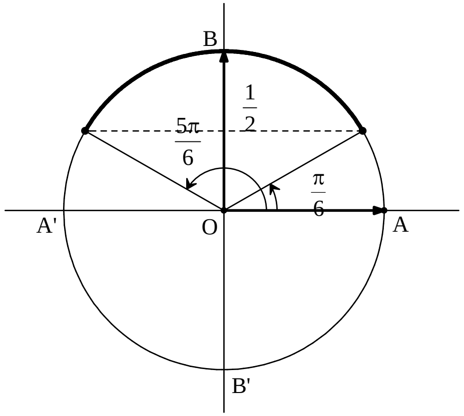
On pose : $X = 2x$.

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$    $\times 2 \ (2 > 0)$

$-\pi \leq 2x \leq \pi$

$-\pi \leq X \leq \pi$

Donc $\begin{cases} \sin X \geq \frac{1}{2} \\ X \in [-\pi\ ;\ \pi] \end{cases}$




D'après le cercle trigonométrique :

$\frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{5\pi}{6}$

**<u>2<sup>e</sup> étape</u>**

Or $X = 2x$

Donc $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$

: 2 (2 >0)

$\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$

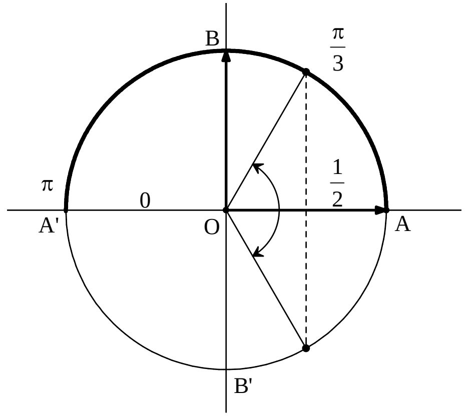
$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{12}\,;\frac{5\pi}{12}\right]}$



## VI. <u>Utilisation de la calculatrice</u>

### 1°) Pour les cosinus

$\cos x = \frac{1}{2}$




**Calculatrice**

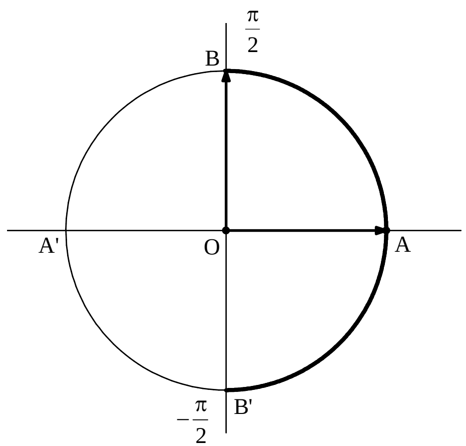
Mode radians :

$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\cos}$ 0,5 = 1,04719…

$\frac{\pi}{3}$

**La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle [0 ; π].**

### 2°) Pour les sinus




**La calculatrice donne une valeur dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.**

## 1ère S — Exercices sur les équations et inéquations trigonométriques

**1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x=\frac{1}{2}$.

**3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 5x+\sin x=0$.

**4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos^2 x+7\cos x+3=0$.

**5** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\,\cos x+\sin 2x=0$.

**6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{2}\,\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=1$.

**7** Résoudre dans $[0\,;\,2\pi]$ l'inéquation $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**8** Résoudre dans $[-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\sin x\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**9** Résoudre dans $[-\pi\,;\,\pi]$ l'inéquation $\cos^2 x<\frac{1}{4}$.



## Réponses

**1** $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

**2** $S=\left\{\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{18}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

**3** Astuce : l'équation est équivalente $\sin 5x=-\sin x$ soit $\sin 5x=\sin(-x)$.

$S=\left\{\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k'\frac{\pi}{2},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

**4** Astuce : on effectue le changement d'inconnue $X=\cos x$.

$S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

**5** Astuce : utiliser la formule de duplication $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$ puis factoriser le 1er membre.

$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{4\pi}{3}+2k''\pi,\ k''\in\mathbb{Z}\right\}$

**6** Astuce : réduire le 1er membre en utilisant une formule d'addition.

$S=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

**7** Méthode : utiliser le cercle trigonométrique.

$S=\left]\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{11\pi}{6}\right[$

**8** Méthode : utiliser le cercle trigonométrique.

$S=\left[-\pi\,;\,-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\pi\right]$

**9** $S=\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]-\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\right[$