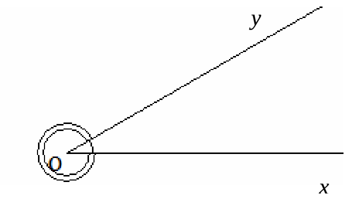
$1^{ère}$ S Chapitre 15 Les angles orientés

I. Introduction

1°) Connaissances sur les angles géométriques



$\widehat{xOy}$: angle saillant

$\underbrace{xOy}$: angle rentrant

O : sommet
[O*x*) et [O*y*) : côtés

On sait mesurer des angles en degrés.

On connaît le vocabulaire des angles géométriques(angles adjacentes : pour des angles géométriques saillants, angles ayant un côté et donc un sommet commun et situés de part et d'autre de ce côté commun, angles opposés par le sommet, angles supplémentaires, angles complémentaires, angles adjacents supplémentaires, angles adjacents complémentaires, angles opposés par le sommet) et les propriétés des mesures en degrés (anges opposés par le sommet, somme des mesures des angles d'un triangle, angles alterne-internes ; théorème de l'angle inscrit).

(N.B. : La notion d'angle aigu, obtus ou droit n'est valable que pour les angles géométriques saillants.)

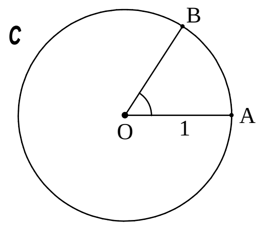
2°) Dans ce chapitre

- On va apprendre une nouvelle unité de mesure d'angle : **le radian**.
- On va considérer un nouveau type d'angle : **angle orienté de vecteur**s.

II. Le radian

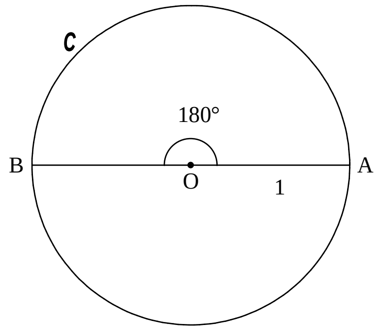
1°) Définition

C est un cercle de centre O et de rayon 1 (une unité de longueur ayant été choisie).
A et B sont deux points quelconques de ***C***.
La **mesure en radian** de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.



2°) Correspondance

Le périmètre de ***C*** est égal à ***P*** $= 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$.



long $\overset{\frown}{AB} = \pi$

$\boxed{\mathbf{180° = \pi\ rad}}$

3°) Angles remarquables

Mesures en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Autres valeurs utiles

Mesures en degrés	120°	135°	150°
Mesure en radians	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

4°) Exercices

- **Convertir 20° en radians.**

20°	180°
x rad	π rad

$x = \dfrac{2\cancel{0} \times \pi}{18\cancel{0}}$

$x = \dfrac{\pi}{9}$

• Convertir 1 radian en degrés.

1 rad	π rad
x °	180°

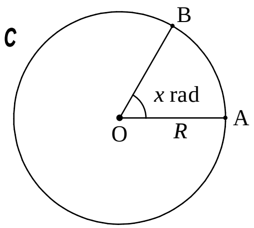
$x = \dfrac{180}{\pi}$

1 rad ≈ 57,295...°

5°) Longueur d'un cercle

Hypothèses :

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R
A et B sont deux points quelconques de $\mathcal{C}$.
$\widehat{\text{AOB}} = x$ rad



× R

Rayon du cercle	1	R
Longueur de l'arc	x	$R \times x$

× R

Par définition du radian

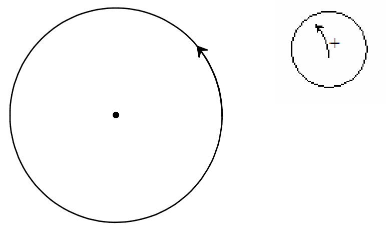
$\boxed{\text{long}\left(\widehat{\text{AB}}\right) = R \times x}$

N.B. : Cette formule est également valable pour un grand arc.

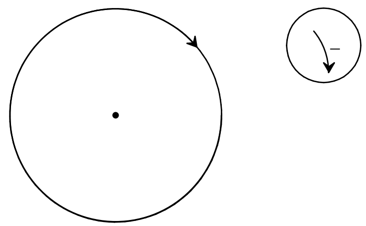
III. <u>Orientation du plan</u>

1°) Plan orienté

On dit que le plan est **orienté** lorsque l'on décide de tourner dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à aiguilles sur tous les cercles du plan.



Sens positif
trigonométrique
direct



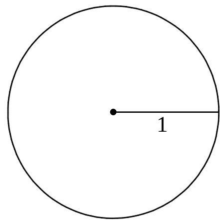
Sens négatif
antitrigonométrique
indirect

Dans tout le reste du chapitre, le plan est orienté.

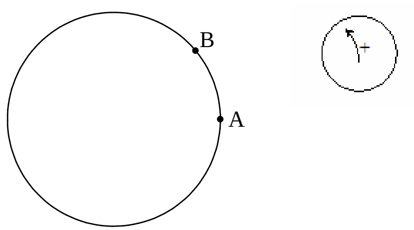
2°) Cercle trigonométrique

Définition

On appelle **cercle trigonométrique** un cercle orienté de rayon 1.



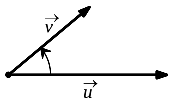
3°) Parcours sur un cercle entre deux points



IV. Ensemble des mesures en radians d'un angle orienté

1°) Position du problème

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan.



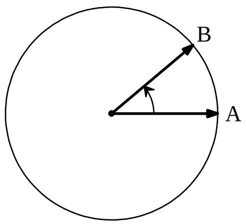
Ces deux vecteurs forment un **angle orienté de vecteurs** noté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

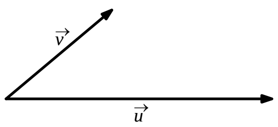
l'ordre.

2°) Définition

$\mathcal{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O.

On note A et B les points de $\mathcal{C}$ tels que :
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{u}$
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}$





Pour mesurer l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, on considère les trajets sur le cercle $\mathcal{C}$ qui vont de A à B.

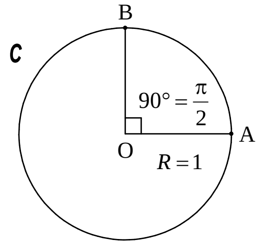
Un trajet a une longueur l.

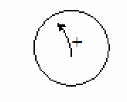
On décide que :

- Si l'on a tourné dans le sens positif, alors $+l$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ (ou $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$)
- Si l'on a tourné dans le sens négatif, alors $-l$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ (ou $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$)

2°) Exemple

On s'intéresse à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.





$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} + \underbrace{2\pi}_{\text{périmètre du cercle}}$; $\frac{\pi}{2} + 4\pi$ …

$\frac{\pi}{2} - 2\pi$; $\frac{\pi}{2} - 4\pi$ …

Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ sont tous les nombres de la forme $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

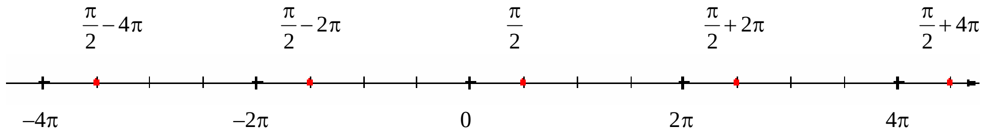
On écrira :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ou

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On ne met pas l'unité (le radian est sous-entendu).



4°) Propriété

Si x est une mesure d'un angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls), alors les mesures en radian de cet angle orienté sont tous les nombres de la forme $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5°) Corollaire

x et y sont deux mesures en radians d'un même angle orienté de vecteurs si et seulement si $x-y$ est un multiple entier de 2π.

6°) Rappels sur les ensembles de nombres

• **$\mathbb{N}$: <u>ensemble des entiers naturels</u> (c'est-à-dire positifs ou nuls)**

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3...\}$

• **$\mathbb{Z}$: <u>ensemble des entiers relatifs</u> (positifs ou négatifs)**

$\mathbb{Z} = \{... -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ...\}$

• **$\mathbb{D}$: <u>ensemble des décimaux relatifs</u>**

Exemples : –1,54 ; 3,075

La partie décimale doit s'arrêter.

• **$\mathbb{Q}$: <u>ensemble des nombres rationnels</u>** (nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs)

Nombres qui peuvent s'écrire $\dfrac{x}{y}$ ($x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}^*$)

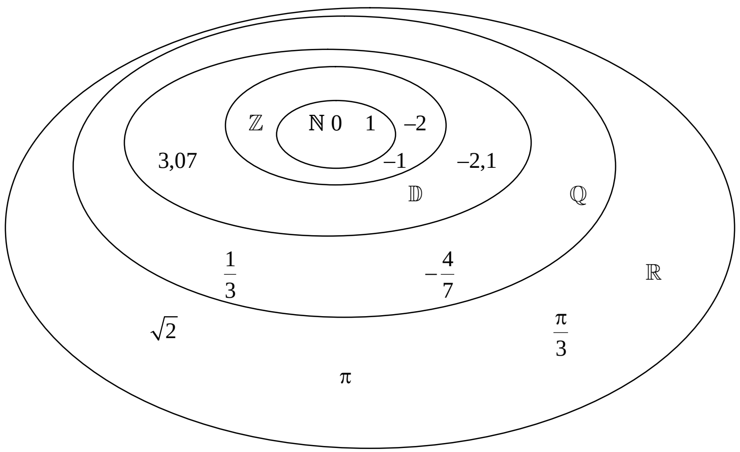
Exemples : $\dfrac{1}{3} = 0,3333...$; $-\dfrac{4}{5} = -0,8$; $\dfrac{5}{7}$

• **$\mathbb{R}$: <u>ensemble des nombres réels</u>**

Exemples : π, $\sqrt{2}$.

$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

« est inclus dans »



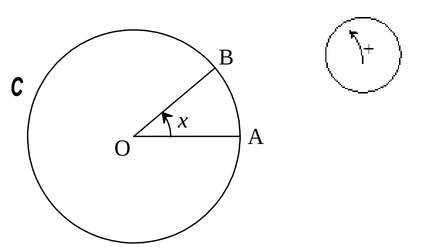
V. <u>Mesure principale d'un angle orienté</u>

1°) Définition

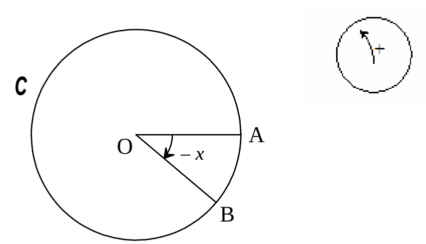
La **mesure principale** en radians d'un angle orienté de vecteur est la mesure en radians de l'angle orienté comprise dans l'intervalle]–π ; π].

2°) Interprétation

On note x la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ ($x \in [0 ; \pi]$).

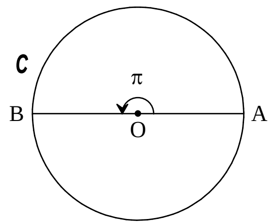


x est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.



$-x$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.

Cas particulier : A et B sont diamétralement opposés



π est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.

3°) Méthode pratique pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté

• **Exemple 1**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $(\vec{u} ; \vec{v}) = \dfrac{25\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{v})$.

On encadre 25 (au numérateur) par deux multiples entiers de 4 (dénominateur).

$4 \times 6 < 25 < 4 \times 7$

On va utiliser 4 × 6 car 6 est pair pour décomposer 25.

$$\begin{aligned}\frac{25\pi}{4} &= \frac{\pi+24\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{24\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{24\pi}{4}\\ &= \frac{\pi}{4}+3\times 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\,\pi\right]\\ 3\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc $\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

• **Exemple 2**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\frac{11\pi}{3}$.

Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On encadre 11 (au numérateur) par deux multiples entiers de 3 (dénominateur).

$3\times 3<11<3\times 4$

On va utiliser 3 × 4 car 4 est pair pour décomposer 11.

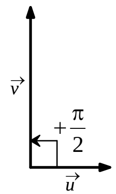
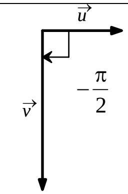
$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{3} &= \frac{12\pi-\pi}{3}\\ &= 2\times 2\pi-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\,\pi\right]\\ 2\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Donc $-\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

4°) Angle orienté de deux vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux non nuls (c'est-à-dire que leurs directions sont orthogonales).

1er cas	2e cas
	
Angle droit direct	**Angle droit indirect**

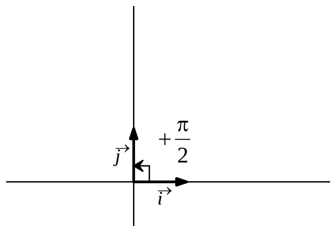
VI. <u>Le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct</u>

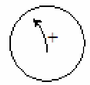
1°) Définition d'un repère orthonormé direct

On dit qu'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est **<u>orthonormé direct</u>** pour exprimer qu'il vérifie les 2 conditions :

C_1 : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ (pour l'unité de longueur choisie)
On dit que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **normés** ou **unitaires**.

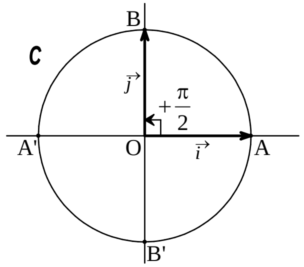
C_2 : $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)=\frac{\pi}{2}$

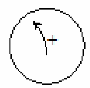




2°) Définition du cercle trigonométrique attaché au repère

Cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct.





A(1 ; 0)   B(0 ; 1) A'(– 1 ; 0)   B'(0 ; –1)

3°) Définition de l'image d'un réel x sur le cercle trigonométrique

• Pour tout réel x, il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
• On dit que M est l'image de x sur le cercle trigonométrique.

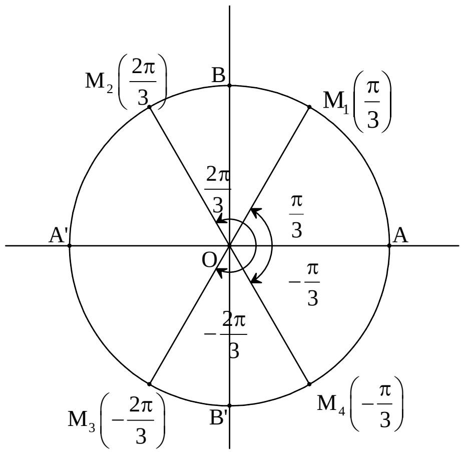
M est l'image de x sur le cercle trigonométrique signifie que $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right) = x$.

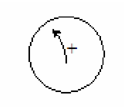
On a donc une application $\mathbb{R} \to \mathcal{C}$

$x \mapsto M(x)$

VII. Images sur le cercle trigonométrique des valeurs remarquables

1°) Images de $\frac{\pi}{3}$ et valeurs associées



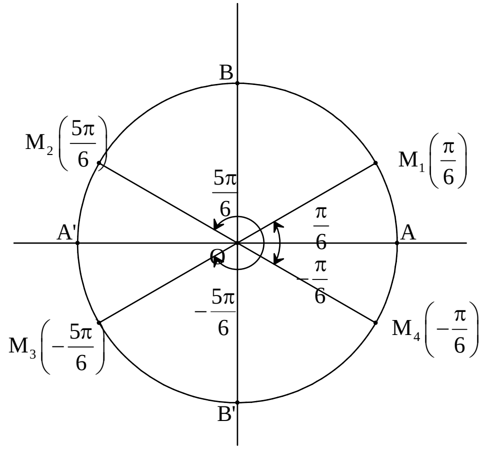


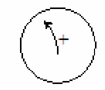
$\frac{\pi}{3}$ rad $= 60° =$ l'un des angles d'un triangle équilatéral

Pointe sèche du compas en A.

On reporte au compas (principe de construction d'une rosace ou d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle).

2°) Images de $\frac{\pi}{6}$ et valeurs associées



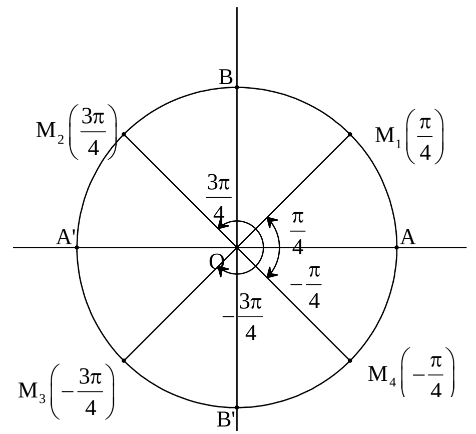


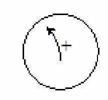
$\frac{\pi}{6}$ rad $= 30° =$ l'un des angles d'un demi-triangle équilatéral

$= 90° - 30° =$ complémentaire de l'un des angles d'un demi-triangle équilatéral

On reporte le rayon.
Pointe sèche du compas en B.

3°) Images de $\frac{\pi}{4}$ et valeurs associées





$\frac{\pi}{4}$ rad $= 45° =$ la moitié d'un angle droit

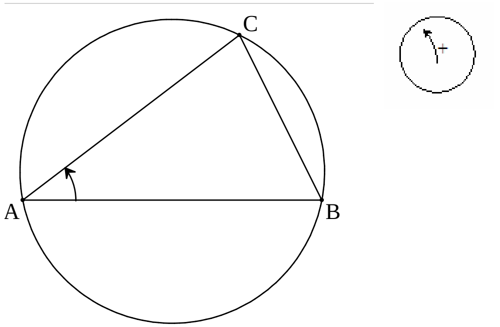
Construction des bissectrices (compas ou carreaux).

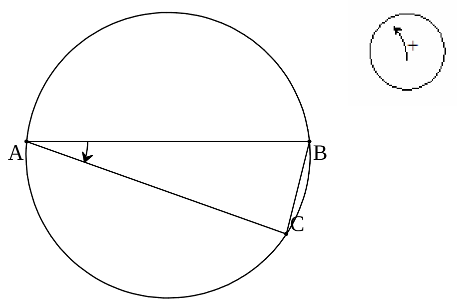
VIII. Orientation d’une figure

1°) Orientation d’un triangle

• On dit qu’un triangle ABC (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **direct** pour exprimer que la mesure principale de l’angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est **positive**.

• On dit qu’un triangle ABC (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **indirect** pour exprimer que la mesure principale de l’angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ est **négative**.

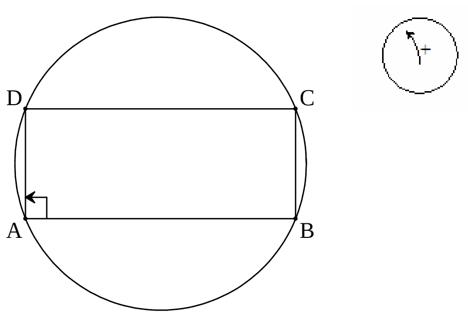


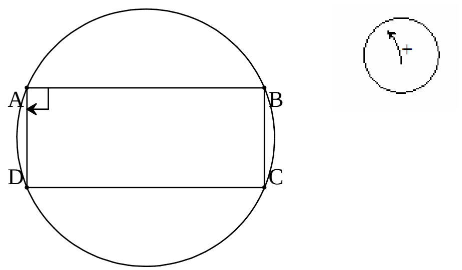


2°) Orientation d’un rectangle

• On dit qu’un rectangle ABCD (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **direct** pour exprimer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}$.

• On dit qu’un rectangle ABCD (les sommets étant nommés dans cet ordre) est **indirect** pour exprimer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{2}$.





IX. Propriétés des angles orientés

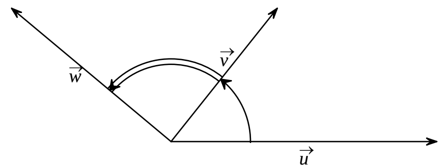
1°) Relation de Chasles pour les angles orientés
(admise sans démonstration)

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs quelconques non nuls.

• Si x est une mesure en radians de l’angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et y est une mesure en radians de l’angle orienté $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$, alors $x+y$ est une mesure de l’angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$.

• On dira que la somme des angles orientés $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ et $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$ est l’angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$.

• On écrira : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$.

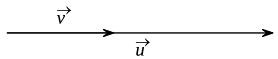


Cette propriété généralise la propriété d’additivité des mesures pour les angles géométriques adjacents vue en 6^{e}.

2°) Angle orienté de deux vecteurs colinéaires non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls.

1er cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens

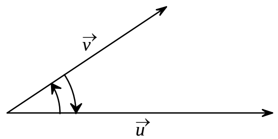


$\boxed{\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=0}$ (angle nul)

2^{e} cas : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire

$\boxed{\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\pi}$ (angle plat)

3°) Angles orientés opposés

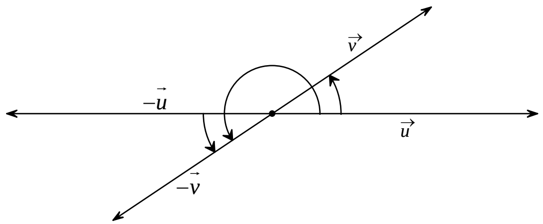


$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
D'après la relation de Chasles : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=\underbrace{\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\text{angle nul}}$

On écrit : $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=0$
ou encore : $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.
On dit que l'angle $\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)$ est l'**opposé** de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

4°) Angles orientés formés les opposés de deux vecteurs non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.



● **Règle**

$$\boxed{\begin{aligned}\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)&=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\\ \left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)&=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\\ \left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)&=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\end{aligned}}$$

● **Commentaires**

Un – : ça n'ajoute rien.
Un + : ça ne change rien.

Pour la 3e égalité, on retrouve la propriété des <u>angles opposés par le sommet</u> (démontrée avec la symétrie centrale).

● **Démonstration**

$$\begin{aligned}\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)&=\underbrace{\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\\ &=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\\ &=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\end{aligned}$$

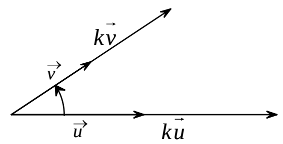
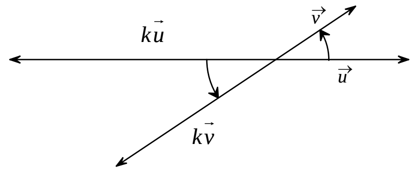
$$\begin{aligned}\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)&=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\underbrace{\left(\vec{v}\,;-\vec{v}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}\\ &=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)&=\underbrace{\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\underbrace{\left(\vec{v}\,;-\vec{v}\right)}_{\substack{\text{vecteurs colinéaires}\\ \text{de sens contraires}}}\\ &=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi\\ &=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+2\pi\\ &=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)\end{aligned}$$

5°) Angles orientés formés par les multiples de deux vecteurs non nuls

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
k est un réel non nul.

● **Figures**

$\boldsymbol{k>0}$ (exemple : $k=2$)	$\boldsymbol{k<0}$ (exemple : $k=-2$)
	

● **Règle**

$$\boxed{\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)}$$

● **Démonstration**

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\,;\vec{u}\right)+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;k\vec{v}\right)$$

1er cas : $\boxed{k>0}$

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=0+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+0$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$

2^{e} cas : $\boxed{k<0}$

$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$

● Généralisation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
k et k' sont deux réels non nuls.

$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)=\begin{cases}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe}\\ \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes contraires}\end{cases}$$

6°) Formulaire récapitulatif

$$\left(\vec{u}\,;\vec{u}\right)=0$$
$$\left(\vec{u}\,;-\vec{u}\right)=\left(-\vec{u}\,;\vec{u}\right)=\pi$$
$$\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$$
$$\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)=-\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$$
$$\left(-\vec{u}\,;-\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(k\vec{u}\,;k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$$
$$\left(k\vec{u}\,;k'\vec{v}\right)=\begin{cases}\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de même signe}\\ \left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi & \text{si } k \text{ et } k' \text{ sont de signes contraires}\end{cases}$$

7°) Exemple d'utilisation en exercice

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A\neq B$ et $A\neq C$.

$$\left(\boxed{\overrightarrow{BA}}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$
règle
$$=\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\pi$$

$$\left(\boxed{\overrightarrow{CA}}\,;\boxed{\overrightarrow{BA}}\right)=\left(-\overrightarrow{AC}\,;-\overrightarrow{AB}\right)$$
règle
$$=\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$$