Les billets en euros

Ce qui est présenté ici s'applique pour tous les billets en euros.
Mais les règles présentées ici ne s'appliquent pas pour les billets des pays étrangers en dehors de la zone euro (par exemple pour les dollars).

Les billets en euros sont numérotés de façon astucieuse.

● Le numéro se présente, pour les anciens billets, sous la forme d'une lettre (correspondant au numéro de série) suivie de onze chiffres.

Exemple : Z73585540773

La lettre indique pour quel pays le billet est imprimé.

● Pour les nouveaux billets, il y a deux lettres (correspondant au numéro de série) suivies de dix chiffres.

Exemple : EA4562608096

Le principe des deux lettres est de coder l'émetteur (typiquement une banque centrale d'un pays) et l'imprimeur.
Ceci permet de retracer l'origine du billet.

Le dernier chiffre est une **clé de contrôle** (code détecteur d'erreurs) qui se calcule à partir de la lettre ou des lettres et 10 ou 9 premiers chiffres.

Ce code ne joue aucun rôle dans la sécurité de la monnaie. Il est juste présent pour vérifier, lorsqu'on est amené à saisir des numéros de billets, qu'il n'y a pas d'erreurs.

Il faut noter de plus que cette clé est toujours un chiffre non nul (entre 1 et 9).

Résumé :

Ancien modèle	**Nouveau modèle**
12 caractères $\begin{cases}1\text{ lettre}\\11\text{ chiffres}\end{cases}$	12 caractères $\begin{cases}2\text{ lettres}\\10\text{ chiffres}\end{cases}$

Calcul de la clé de contrôle

On remplace d'abord la lettre (s'il s'agit d'un ancien modèles) ou les deux lettres (s'il s'agit d'un nouveau modèle) par son rang dans l'alphabet comme indiqué dans le tableau suivant :

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Nous obtenons un nombre de douze, treize ou quatorze chiffres.
Alors, le reste de ce nombre dans la division euclidienne par 9 doit être 8 pour les anciens billets et 7 pour les nouveaux billets.

Règle :

• Ancien modèle :

On remplace le numéro composé par la lettre et par les 10 premiers chiffres en un numéro N composé uniquement de chiffres.

On calcule le reste R de la division euclidienne de N par 9.
La clé C s'obtient de la manière suivante : $C=8-R$ si $0\leqslant R\leqslant 7$ et $C=9$ si $R=8$.

• Nouveau modèle :

On remplace le numéro composé par les deux lettres et par les 9 premiers chiffres en un numéro N composé uniquement de chiffres.

On calcule le reste R de la division euclidienne de N par 9.
La clé C s'obtient de la manière suivante : $C=7-R$ si $0\leqslant R\leqslant 6$; $C=9$ si $R=7$; $C=8$ si $R=8$.

Conséquence :
La clé de contrôle d'un billet banque est un chiffre de 1 à 9.
La clé de contrôle d'un billet de banque n'est jamais égale à 0.

Il serait extrêmement facile de concevoir un programme qui permet de rentrer la (ou les) lettre(s) et les chiffres d'un billet et qui affiche en sortie la clef de contrôle du billet.

Exemple de calcul :

On considère un billet dont le numéro est UC7242537655.
Vérifions que la clé de contrôle de ce billet est bien 5.

La lettre U correspond au nombre 21 et la lettre C correspond au nombre 3.

Le nombre sans la clé associé au billet est 213724253765.

On calcule le reste de la division euclidienne de ce nombre par 9 « à la main » par la méthode de la somme des chiffres ($2+1+3+7+2+4+2+5+3+7+6+5$).

On associe les chiffres donnant une somme égale à 9 et on les enlève.

$$2+\underbrace{1+3}+\cancel{7}+\cancel{2}+\cancel{4}+\cancel{2}+\cancel{5}+\cancel{3}+\cancel{7}+\cancel{6}+\underbrace{5}$$

Le reste est égal à 2.

Donc la clé est égale à $7-2=5$ ce qui est bien ce qui était annoncé pour le billet considéré.

À quoi sert la clé de contrôle pour un billet ?

Les erreurs de saisie les plus courantes sont :
- l’erreur simple sur la saisie d’un chiffre,
- la permutation de deux chiffres consécutifs.

On conclut qu’un bon code détecteur d’erreurs doit posséder, dans ce contexte, les bonnes propriétés suivantes :
- la clé doit être courte (1 chiffre),
- il doit détecter une erreur simple,
- il doit détecter une permutation de deux chiffres consécutifs.

Alors qu’en est-il du code détecteur des billets en euros ?

On peut dire que ce code a un chiffre de clé, puisque si on donne les lettres et tous les chiffres sauf le dernier, ce dernier se calcule, et on peut dire que c’est la clé.

Ce code ne détecte pas toujours une erreur simple puisque 0 est confondu avec 9.
Par ailleurs, il est clair qu’une permutation des chiffres ne change rien au résultat du calcul. Ce code ne détecte donc pas une permutation de deux chiffres consécutifs. On rappelle qu’il existe des codes avec une clé d’un seul chiffre qui détectent toujours une erreur simple et qui détectent toujours une permutation de deux chiffres consécutifs.

Propriété (conséquence de la règle définissant la clé de contrôle) :

On note N le nombre total avec la clé obtenu en remplaçant la lettre (s’il s’agit d’un ancien modèles) ou les deux lettres (s’il s’agit d’un nouveau modèle) par son rang dans l’alphabet.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est égal **8** pour les anciens billets.

Le reste de la division euclidienne de N par 9 est égal **7** pour les nouveaux billets.

La démonstration est facile.

Exemples :

• billet UE3171381776

La lettre U est remplacée par 21 ; la lettre E est remplacée par 5.

On obtient le nombre 2153171381776.

On fait une preuve par 9 (on ajoute les chiffres successifs : quand on tombe sur 9 on remplace par 0 ; si le résultat donne un nombre à deux chiffres, on ajoute ces deux chiffres) :
$2+1=3$, $3+5=8$, $8+3=11 \rightarrow 1+1=2$, $2+1=3$, $3+7=10 \rightarrow 1+0=1$, $1+1=2$, $2+3=5$,
$5+8=13 \rightarrow 1+3=4$, $4+1=5$, $5+7=12 \rightarrow 1+2=3$, $3+7=10 \rightarrow 1+0=1$, $1+6=7$.

• billet NA3802962421

En remplaçant N par 14, et A par 1, on obtient 1413802962421.
La preuve par 9 sur ce nombre donne bien 7.

Une version unifiée

Voici une version de l'algorithme qui marche à la fois pour les anciens et les nouveaux billets :

On remplace la ou les lettres par sa ou ses valeurs (place dans l'alphabet). On fait la preuve par 9 du nombre obtenu et on ajoute le nombre de lettres modulo 9 : on doit obtenir 0.
En effet, pour les anciens billets qui n'avaient qu'une lettre, on obtenait 8 modulo 9 et donc $8+1 \equiv 0$ modulo 9 et pour les nouveaux billets qui ont deux lettres, on trouve 7 modulo 9 et donc $7+2 \equiv 0$ modulo 9.

On peut alors se poser la question légitime suivante pour laquelle il faut une boule de cristal : quand les billets à trois lettres arriveront, cet algorithme unifié sera-t-il encore valide ?

Il y a d'autres sujets annexes dont on peut parler :

- le filigrane des billets (portrait d'Europe, figure de la mythologie grecque) ;

- le numéro vertical.

Exercice :

On considère un billet de banque de 10 € dont le numéro sans la clé est : NA510389165.
Trouver la clé de contrôle de ce billet.

Solution :

D'après le tableau donné précédemment, on peut remplacer N par 14 et A par 1.

Le reste de la division euclidienne du nombre 141510389165 par 9 est 0.
Comme il s'agit d'un nouveau modèle, la clé de contrôle du billet est $7-0=7$.

Appendice sur les lettres des billets

Sur les billets de la nouvelle série, le numéro de série de chaque coupure est constitué de deux nombres imprimés au recto : **un nombre horizontal imprimé en noir et un nombre vertical imprimé dans une autre couleur**.
Le nombre horizontal comprend 2 lettres et 10 chiffres. La première lettre indique l’imprimerie (voir la liste ci-dessous). La deuxième lettre n’a pas de signification particulière et permet uniquement de multiplier les combinaisons possibles.

Banque nationale de Belgique	Z
Banque de Grèce	Y
Giesecke & Devrient GmbH (Münich)	X
Giesecke & Devrient GmbH (Leipzig)	W
Fabrica Nacional de Moneda y Timbre	V
Banque de France	U
Banque centrale d’Irlande	T
Banque d’Italie	S
Bundesdruckerei GmbH	R
Joh.Enschede Security Printing BV	P
Oesterreichische Banknoten und Sicherheitsdruck GmbH	N
Valora	M
De la rue Currency (Gateshead)	J
De la rue Currency (Loughton)	H
Oberthur Fiduciaire	E
Polska Wytwornia Papierow Warto ciowych	D
Lettres non utilisées	A, B, C, F, G, L, K