$1^{\text{ère}}$ S

Valeur absolue (2)

Objectif : reprendre la notion de valeur absolue mais sous un aspect algébrique.

I. Expression de la valeur absolue d'un réel suivant son signe

1°) Démonstration

x est un réel quelconque.

<u>1^{er} cas</u> : $x \geqslant 0$

valeur absolue de $x = |\,x\,| = \mathrm{d}(0\,;x) = x - 0 = x$

Exemple : $|\,3\,| = 3$

<u>2^e cas</u> : $x \leqslant 0$

valeur absolue de $x = |\,x\,| = \mathrm{d}(0\,;x) = 0 - x = -x$

Exemple : $|-3| = 3 = -(-3)$

2°) Règle

$$|\,x\,| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

règle qui permet d'enlever les barres de valeur absolue

On peut appeler cette règle : « règle pour faire sauter les valeurs absolues ».

Cette règle peut servir à exprimer la valeur absolue d'une expression numérique ou littérale sans barres de valeur absolue (cf. exercices).
On peut aussi retenir la règle sous la forme suivante qui nous sera d'un grand usage :

$$|\,\textbf{truc}\,| = \begin{cases} \textbf{truc si truc} \geqslant 0 \\ -\textbf{truc si truc} \leqslant 0 \end{cases}$$

3°) Exercices

① Écrire sans barres de valeur absolue.

★ $\mathrm{A} = |\,\pi - 3\,|$

$\pi - 3 > 0$ car $\pi > 3$

Donc $\mathrm{A} = \pi - 3$.

★ $\mathrm{B} = |\,1 - \pi\,|$

$1 - \pi < 0$ car $1 < \pi$

Donc $\mathrm{B} = -(1 - \pi)$

parenthèses

$\mathrm{B} = -1 + \pi$
$\mathrm{B} = \pi - 1$

On retiendra :

- On ne peut pas enlever les valeurs absolues sans précaution.
- On doit s'interroger sur le signe de ce qui est à l'intérieur.

② Exprimer $|\,x-3\,|$ en fonction de x sans barres de valeur absolue (x étant un réel quelconque).

$$|\,x-3\,| = \begin{cases} x-3 \text{ si } x-3 \geqslant 0 \text{ c'est-à-dire si } x \geqslant 3 \\ -(x-3) = 3-x \text{ si } x-3 \leqslant 0 \text{ c'est-à-dire si } x \leqslant 3 \end{cases}$$

II. Expression de la distance de deux réels à l'aide de la valeur absolue

1°) Règle

La distance entre deux réels a et b est donnée par la formule $\mathrm{d}(a\,;b) = |\,a-b\,|$.

On a aussi : $\mathrm{d}(a\,;b) = |\,b-a\,|$.
En effet, $b - a = -(a - b)$ et l'on sait qu'un nombre et son opposé ont la même valeur absolue
($\forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |\,x\,|$).

On retiendra que **la distance entre deux réels a et b est égale à $|a-b| = |b-a|$.**

2°) Démonstration

<u>1^er^ cas</u> : $a \geqslant b$

$\mathrm{d}(a\,;b) = a-b$

$|a-b| = a-b$

<u>2^e^ cas</u> : $a \leqslant b$

$\mathrm{d}(a\,;b) = b-a$

$|a-b| = -(a-b) = b-a$

Conclusion : dans les deux cas, on a : $\mathrm{d}(a\,;b) = |a-b|$

3°) Exemples

$\mathrm{d}(1\,;\pi) = |1-\pi|$

$\mathrm{d}(x\,;2) = |x-2|$

$\mathrm{d}(x\,;-1) = |x+1|$

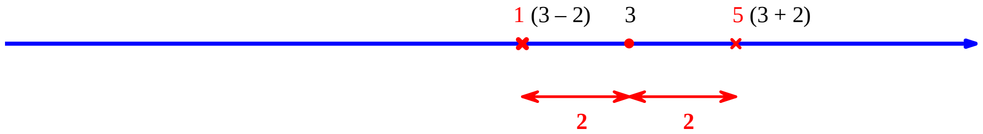
III. <u>Résolutions d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues en utilisant un axe</u>

1°) Exemple 1

Résoudre l'équation $|x-3| = 2$ (1).

(1) signifie que la distance entre x et 3 est égale à 2.

$\mathrm{d}(x\,;\,3) = 2$

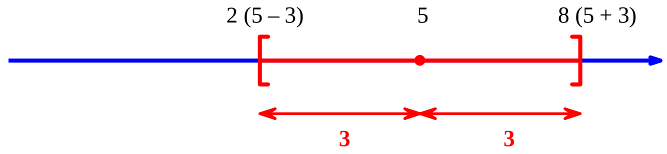


L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \{1\,;\,5\}$.

2°) Exemple 2

Résoudre l'inéquation $|x-5| \leqslant 3$ (2).

(2) signifie que la distance entre x et 5 est inférieure ou égale à 3.

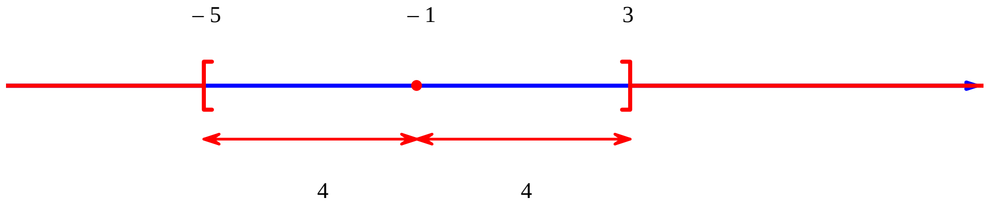


L'ensemble des solutions de (2) est $S_2 = [2\,;\,8]$.

3°) Exemple 3

Résoudre l'inéquation $|x+1| > 4$ (3).

(3) signifie que la distance entre x et -1 est strictement supérieure à 4.



L'ensemble des solutions de (3) est $S_3 =]-\infty\,;-5[\cup]3\,;+\infty[$.

IV. <u>Valeur absolue et racine carrée</u>

1°) Démonstration

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

2°) Règle

Pour tout réel x,

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

3°) Exemples

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

4°) Rappel

Pour tout réel $x \geqslant 0$

$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)^2 = x}$

V. Propriétés algébriques de la valeur absolue

1°) Valeur absolue d'un produit

● **Règle**

Pour tous réels x et y, on a : $|xy| = |x|\,|y|$.

La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues.

● **Démonstration**

$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 \times y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$

2°) Valeur absolue d'un quotient

● **Règle**

Pour tous réels x et y ($y \neq 0$), on a : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

La valeur absolue d'un quotient est égale au quotient des valeurs absolues.

● **Démonstration**

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

● **Cas particulier**

Pour tout $x \neq 0$, on a : $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$.

3°) Valeur absolue d'une somme (inégalité triangulaire)

● **Règle**

Pour tous réels x et y, on a : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

La valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues.

● **Démonstration**

Principe : les deux membres de l'inégalité sont positifs ou nuls ; pour les comparer, il suffit de comparer leurs carrés.

$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x|\times|y| + |y|^2 = x^2 + 2|x|\times|y| + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2$

On a : $xy \leqslant |xy|$ (tout nombre est inférieur ou égal à sa valeur absolue).

Donc : $2xy \leqslant 2|xy|$.

Par suite, $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + y^2 + 2|xy|$.

On a donc $|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$.

Par suite, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

● **En général, la valeur absolue d'une somme n'est pas égale à la somme des valeurs absolues.**

Exemple :

$x = 5$ et $y = -3$

$|x+y| = |5-3| = 2$

$|x|+|y| = |5|+|-3| = 5+3 = 8$

Les deux résultats sont différents.

● Lorsque x et y sont deux nombres de même signe, on a : $|x+y| = |x|+|y|$ (démonstration facile).

VI. Valeur absolue et intervalle

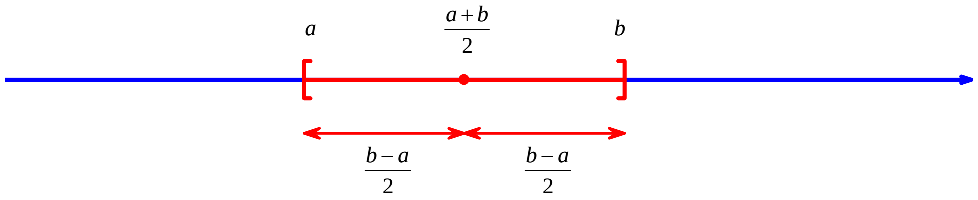
1°) Centre et rayon d'un intervalle $[a\ ;\ b]$ ($a \leqslant b$)

• **Définitions**

★ **Centre de l'intervalle $[a\ ;\ b]$: $c = \dfrac{a+b}{2}$**

★ **Longueur de l'intervalle $[a\ ;\ b]$: $b - a$ (différence entre la borne supérieure et la borne inférieure)**

★ **Rayon de l'intervalle $[a\ ;\ b]$: $r = \dfrac{b-a}{2}$**



• **Exemple : [1 ; 7]**

Centre : 4
Longueur : 6
Rayon : 3

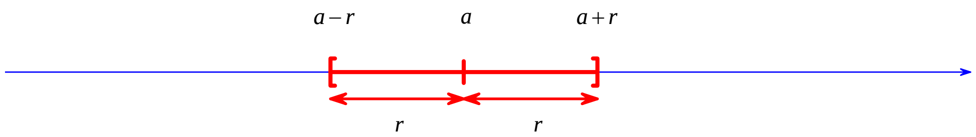
• **Caractérisation de l'appartenance d'un élément à l'aide de la valeur absolue (cf. 2°) :**

$$x \in [a\ ;\ b] \text{ équivaut à } \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leqslant \frac{b-a}{2}$$

• **Remarque de vocabulaire :**

On parle du centre de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et non de son milieu.

2°) Lien entre intervalles et valeur absolue



x appartient à l'intervalle de centre a et de rayon r ($r > 0$) équivaut à $|x - a| \leqslant r$.

On retient :

$\boldsymbol{|x - a| \leqslant r}$ **équivaut à** $\boldsymbol{a - r \leqslant x \leqslant a + r}$.

Exemple :

$|x - 2| \leqslant 3$ équivaut à $2 - 3 \leqslant x \leqslant 2 + 3$

équivaut à $-1 \leqslant x \leqslant 5$

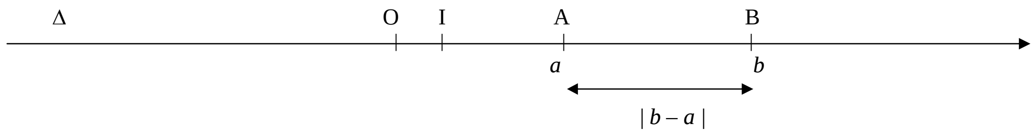
N.B. : La notion de centre d'un intervalle a déjà été abordée en statistiques avec la notion de **centre de classe**.

VII. Distance de deux points sur un axe

1°) Expression

Δ est un axe de repère (O, I) tel que $\text{OI} = 1$ (une unité de longueur est fixée).

Soit A et B deux points de Δ d'abscisses respectives a et b.



La distance AB est égale à la distance des réels a et b.

AB = $|b - a|$

N.B. : La notation d(a ; b) ne sera utilisée que pour désigner la distance de deux réels a et b.

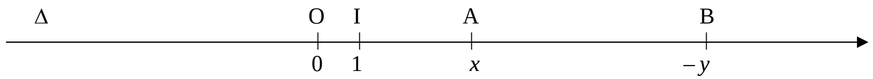
Pour désigner la distance de deux points A et B, on écrira AB et non d(A ; B).

2°) Démonstration graphique de l'inégalité triangulaire pour les réels (lien entre inégalité pour les réels et inégalité triangulaire pour les points)

x et y sont deux réels quelconques.

On considère un axe Δ de repère (O, I) tel que $\text{OI} = 1$.

On note A et les points de Δ d'abscisses respectives x et $-y$.



Pour la figure on a supposé que $x > 0$ et $y < 0$ (donc $-y > 0$).

$\text{OA} = |x|$
$\text{OB} = |y|$

$\text{AB} = |\, x - (-y) \,| = |\, x + y \,|$

D'après l'inégalité triangulaire pour les points, on a AB $\leqslant$ AO + OB.

Donc $|\, x + y \,| \leqslant |\, x \,| + |\, y \,|$.

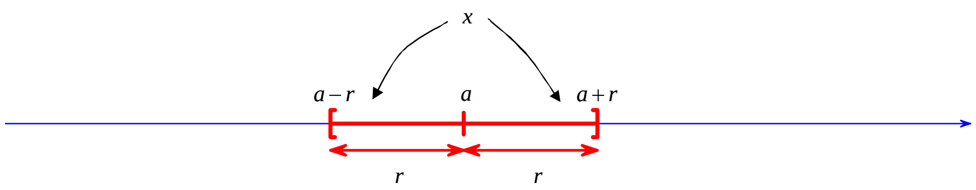
VIII. Valeurs approchées d'un réel

1°) Définition

x est un réel donné.

On dit qu'**un nombre a est une valeur approchée de x à la précision r ou à r près** (r étant un réel strictement positif) pour exprimer que la distance entre x et a est inférieure ou égale à r ce qui peut se traduire de 3 manières équivalentes :

$$\mathrm{d}(x\,;a) \leqslant r \qquad ; \qquad |x - a| \leqslant r \qquad ; \qquad a - r \leqslant x \leqslant a + r.$$



On écrit $x \approx a$ (valeur approchée à r près).

2°) Exercices-types

a) 3,155 est une valeur approchée de x à 4×10^{-3} près.

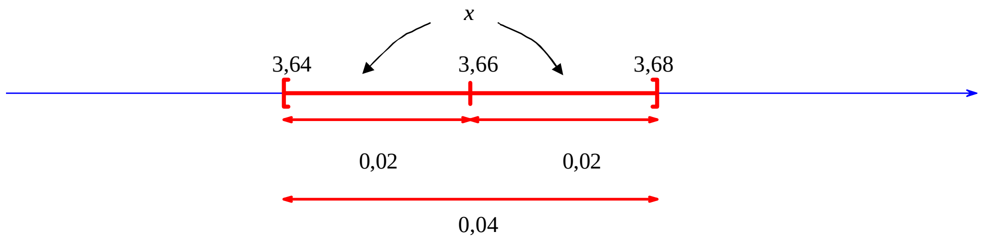
Encadrer x (donner le meilleur encadrement de x).

3,155 – 0,004 $\leqslant x \leqslant$ 3,155 + 0,004

3,151 $\leqslant x \leqslant$ 3,159

b) On sait que 3,64 $\leqslant x \leqslant$ 3,68.
Si l'on prend comme valeur approchée de x le nombre 3,66, quelle est alors la précision ?

On observe que 3,66 est le centre de l'intervalle [3,64 ; 3,68].



On a : 3,66 – 0,02 $\leqslant x \leqslant$ 3,66 + 0,02

Donc 3,66 est une valeur approchée de x à 2×10^{-2} près.

3°) Attention à ne pas confondre valeur exacte et valeur approchée

Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 3 et AC = 1.

Le théorème de Pythagore donne $\text{BC} = \sqrt{10}$.

Grâce à la calculatrice, on trouve : $\sqrt{10} = 3{,}1622776...$

$\sqrt{10}$ est la **valeur exacte** de BC.
3,2 est une **valeur approchée** de BC à 10^{-1} près.

On écrit $\text{BC} \approx 3{,}2$ (valeur approchée à 10^{-1} près).

On dit aussi valeur approchée au dixième près.

4°) Remarque

La précision d'une valeur approchée est souvent donnée sous la forme $A \times 10^{-p}$ où A est un entier naturel.

5°) Vocabulaire

• On dit qu'une valeur approchée a de x est une valeur approchée **par défaut** de x lorsqu'elle est inférieure ou égale à x ($a \leqslant x$).

• On dit qu'une valeur approchée a de x est une valeur approchée **par excès** de x lorsqu'elle est supérieure ou égale à x ($a \geqslant x$).

IX. Valeur arrondie

1°) Exemple

$\pi = 3{,}1415926\ldots$

	valeur arrondie de π
Au dixième	3,1
Au centième	3,14
Au millième	3,142
Au dix-millionième	3,1416

On regarde toujours la décimale qui suit immédiatement (et non pas les autres décimales).

2°) Règle (procédé d'arrondi automatique)

Pour arrondir un nombre à la 3^e^ décimale, on regarde la 4^e^ décimale :

• Si la 4^e^ décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors on garde la 3^e^ décimale.

• Si la 4^e^ décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors on augmente de 1 la 3^e^ décimale.

3°) Remarque

Pour $\dfrac{1}{6}$, certaines calculatrices affichent 0,166 666 667.
C'est une valeur arrondie.
On ne peut jamais être sûr que la dernière décimale soit juste.

On écrira : $\dfrac{1}{6} = 0{,}166\,666\,66...$
On utilise le signe d'égalité avec trois petits points qui signifient que toutes les décimales sont exactes mais qu'il y a d'autres décimales qui ne sont pas écrites.

On peut aussi écrire $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}166\,666\,667$ (valeur arrondie à la 9^e^ décimale).

X. Valeurs décimales approchées par excès et par défaut

1°) Exemple

	par défaut	approximation décimale de π*	par excès
d'ordre 1	3,1	$3{,}1 \leqslant \pi < 3{,}2$	3,2
d'ordre 2	3,14	$3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15$	3,15
d'ordre 3	3,141	$3{,}141 \leqslant \pi < 3{,}142$	3,142

*** ou « valeur décimale approchée de π »**

On dira par exemple que 3,14 est l'approximation décimale d'ordre 2 de π par défaut.

Attention, on se gardera d'écrire $\pi = 3{,}1$, ni $\pi = 3{,}14$ … : π n'est égal à aucune de ses valeurs décimales approchées par défaut ou par excès.

2°) Quelques précisions

• On prendra garde à l'inégalité large à gauche et stricte à droite de l'encadrement qui permettant de définir les approximations décimales d'ordre p d'un réel.

• On notera l'emploi de l'article défini.

• Il est quasiment évident que les approximations décimales par défaut et par excès d'ordre p d'un réel x sont des valeurs approchées de ce réel à 10^{-p} près.

3°) Définition

x est un réel quelconque.
y décimal d'ordre p (c'est-à-dire comportant p décimales).

y est la **valeur décimale approchée d'ordre p par défaut de x** signifie que $y \leqslant x < y + 10^{-p}$.

Dans ce cas, $z = y + 10^{-p}$ est appelé la **valeur décimale approchée d'ordre p par excès de x**.

Commentaires :

• Les expressions « par défaut » et « par excès » se réfèrent au positionnement de y et z par rapport à x.

• La notion de valeur décimale approchée par excès ou par défaut d'un réel x n'a aucun rapport avec la notion d'arrondi automatique.

4°) Écriture décimale illimitée d'un réel

Propriété :

Tout réel admet un développement décimal (ou une écriture décimale) illimitée unique.

Ce développement décimal ne comporte pas de 9 à partir d'un certain rang.
Ce développement décimal est unique.
Deux nombres sont égaux si et seulement si toutes leurs décimales sont égales.

Cas particuliers :

• Nombre décimal

Lorsque l'on a un nombre décimal, les décimales sont égales à 0 à partir d'un certain rang, on dit que le développement décimal est fini et l'on n'écrit pas ces décimales.
On écrit la dernière décimale non nulle (c'est-à-dire que l'on n'écrit pas les décimales inutiles).

Exemple :

2,731 est un nombre décimal qui possède trois chiffres après la virgule (ou trois décimales). On dit que c'est un décimal d'ordre 3.

• Nombre rationnel

Le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang c'est-à-dire qu'un même groupe de chiffres se répète indéfiniment à partir d'un certain rang. On souligne ce groupe de chiffres pour dire qu'il se répète indéfiniment.

Exemple :

$x = 2{,}1\underline{45}\ldots$

5°) Exercice

Soit x et y deux réels tels que $x = 13{,}26785661\ldots$ et $y = -3{,}2010456\ldots$.
Déterminer les valeurs décimales approchées d'ordre 3 par excès et par défaut de x et de y en justifiant.

Solution (avec rédaction-modèle) :

• On a : $13{,}267 \leqslant x < 13{,}268$.
Donc la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de x est égale à 13,267 et la valeur décimale approchée d'ordre 3 par excès de x est 13,268.

• On a : $-3{,}202 \leqslant y < -3{,}201$.
Donc la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de y est égale à – 3,202 et la valeur décimale approchée d'ordre 3 par excès de y est – 3,201.

XI. Appendice : autre démonstration des propriétés du produit et du quotient pour les valeurs absolues

1°) Rappel

$$|\,a\,| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

2°) Démonstration de la propriété du produit

On veut démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ |\,xy\,| = |\,x\,| \times |\,y\,|$.
On raisonne par disjonction de cas.

	1er cas : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$	**2e cas :** $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$	**3e cas :** $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$	**4e cas :** $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$
$\|x\|$	x	x	$-x$	$-x$
$\|y\|$	y	$-y$	y	$-y$
$\|x\|\times\|y\|$	$x \times y$	$x \times (-y) = -xy$	$(-x) \times y = -xy$	$(-x) \times (-y) = xy$
$\|xy\|$	$x \times y$	$-xy$	$-xy$	xy

On compare les résultats des lignes de $|\,x\,| \times |\,y\,|$ et $|\,xy\,|$. On constate qu'ils sont égaux à chaque fois.

On en déduit la propriété : pour tout couple (x ; y) de réels on a : $|\,xy\,| = |\,x\,| \times |\,y\,|$.

N.B. : Dans cette démonstration, il ne s'agit pas tout à fait d'une disjonction de cas ; il faudrait mettre des inégalités strictes dans certains cas.

La démonstration repose sur la propriété suivante :

$$|\,\mathrm{A}\,| = \begin{cases} \mathrm{A} \text{ si } \mathrm{A} \geqslant 0 \\ -\mathrm{A} \text{ si } \mathrm{A} \leqslant 0 \end{cases}$$

①	②	③	④
$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$	$x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$	$x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$	$x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$

① $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

On a alors $|x| = x$ et $|y| = y$.

De plus, $xy \geqslant 0$.

Donc $|xy| = xy = |x| \times |y|$

② $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$

On a alors $|x| = x$ et $|y| = -y$.

De plus, $xy \leqslant 0$.

Donc $|xy| = -xy = x \times (-y) = |x| \times |y|$

③ $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

On a alors $|x| = -x$ et $|y| = y$.

De plus, $xy \leqslant 0$.

Donc $|xy| = -xy = (-x) \times y = |x| \times |y|$

④ $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$

On a alors $|x| = -x$ et $|y| = -y$.

De plus, $xy \geqslant 0$.

Donc $|xy| = xy = (-x) \times (-y) = |x| \times |y|$

3°) Démonstration de la propriété du quotient

On veut démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^* \quad |xy| = |x| \times |y|$.

Attention, comme *y* est non nul, on doit bien écrire des **inégalités strictes** pour y.

	1^er^ cas : $x \geqslant 0$ $y > 0$	**2^e^ cas :** $x \geqslant 0$ $y < 0$	**3^e^ cas :** $x \leqslant 0$ $y > 0$	**4^e^ cas :** $x \leqslant 0$ $y < 0$
$\lvert x \rvert$	x	x	$-x$	$-x$
$\lvert y \rvert$	y	$-y$	y	$-y$
$\dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{-x}{y} = -\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$
$\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert$	$\dfrac{x}{y}$	$-\dfrac{x}{y}$	$-\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{y}$

On compare les résultats des lignes de $\dfrac{|x|}{|y|}$ et $\left|\dfrac{x}{y}\right|$. On constate qu'ils sont égaux à chaque fois.

On en déduit la propriété : pour tout couple (x, y) de réels tels que $y \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

①	②	③	④
$x \geqslant 0$ $y > 0$	$x \geqslant 0$ $y < 0$	$x \leqslant 0$ $y > 0$	$x \leqslant 0$ $y < 0$

① $x \geqslant 0$ et $y > 0$

On a alors $|x| = x$ et $|y| = y$.

De plus, $\dfrac{x}{y} \geqslant 0$.

Donc $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

② $x \geqslant 0$ et $y < 0$

On a alors $|x| = x$ et $|y| = -y$.

De plus, $\dfrac{x}{y} \leqslant 0$.

Donc $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

③ $x \leqslant 0$ et $y > 0$

On a alors $|x| = -x$ et $|y| = y$.

De plus, $\dfrac{x}{y} \leqslant 0$.

Donc $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$

④ $x \leqslant 0$ et $y < 0$

On a alors $|x| = -x$ et $|y| = -y$.

De plus, $\dfrac{x}{y} \geqslant 0$.

Donc $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$

XII. Appendice : autre démonstration de l'inégalité triangulaire

On prend deux réels x et y quelconques.

On a : $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$.

En additionnant membre à membre, on obtient :
$-|x|-|y| \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$

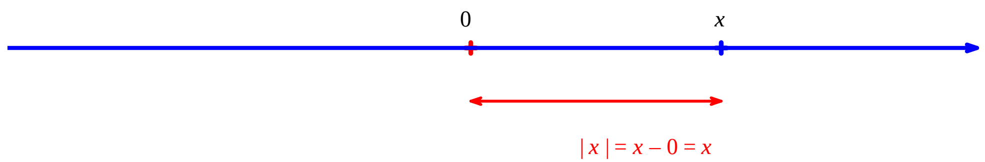
soit $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$.

Donc on en déduit que l'on a : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

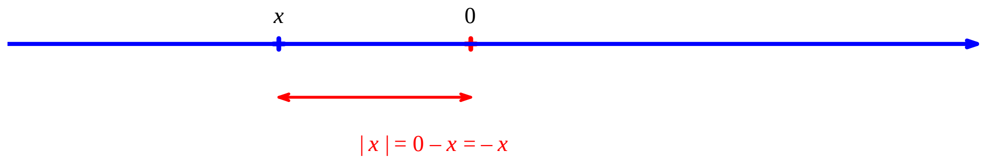
Cours oral

I. Expression de la valeur absolue d'un réel sans barres de valeur absolue

$x \geqslant 0$



$x \leqslant 0$



Dans un certain nombre de situations, on cherche à enlever les barres de valeurs absolues.

(On ne cherche cependant pas toujours à enlever les barres de valeur absolue).

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Message à faire passer (je reprends pour cela une fiche ou un cours de Louis-Marie Manceau) :

$$|\,\text{truc}\,| = \begin{cases} \text{truc si truc} \geqslant 0 \\ -\,\text{truc si truc} \leqslant 0 \end{cases}$$

Écrire sans barre de valeur absolue

1. $A = |\pi - 3|$ et $B = |1 - \pi|$

2. $|2x + 3|$

On fait un tableau de signes.

Une conséquence intéressante :

Pour tout réel x, on a : $|x|^2 = x^2$.

Démonstration :

$x \geqslant 0$	$x \leqslant 0$
$\|x\| = x$	$\|x\| = -x$
Donc $\|x\|^2 = x^2$	Donc $\|x\|^2 = (-x)^2 = x^2$

Dans les deux cas, on a : $|x|^2 = x^2$.

Cette propriété est utilisée dans la démonstration algébrique de l'inégalité triangulaire.

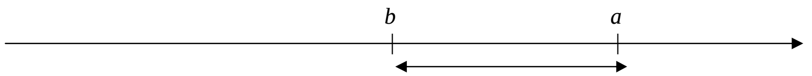
Ne pas retenir la règle en raccourci :

$|a| = a$ ou $-a$ (en tous cas ne pas le dire comme cela à l'oral)

$|a| = a$ ou $-a$ ne veut rien dire

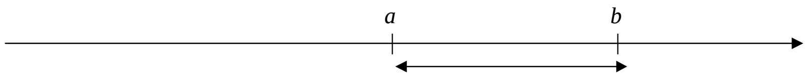
II. Expression de la distance de deux réels à l'aide de la valeur absolue

$a \geqslant b$



$a - b = |a - b|$

$a \leqslant b$



$b - a = -(a - b) = |a - b|$

III. Inégalité triangulaire

$|x + y| = |x| + |y|$ lorsque x et y sont de même signe

Complément sur les encadrements

1. Vocabulaire :

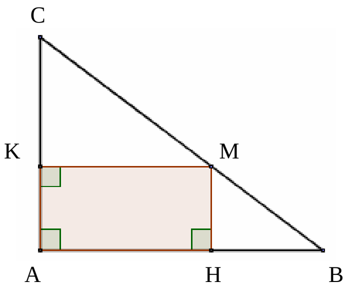
Si on a un encadrement d'un réel x, $a \leqslant x \leqslant b$, on peut dire que :

a : **minorant** de x ;
b : **majorant** de x.

$b - a$: **amplitude** de cet encadrement.

2. Exemple concret :

ABC est un triangle rectangle en A.
M est un point quelconque variable de [BC].
H et K sont les points appartenant respectivement à [AB] et [AC] tels que le quadrilatère AHMK soit un rectangle.



L'aire de AHMK est toujours supérieure ou égale à 0 et toujours inférieure ou égale à l'aire du triangle ABC.

3. Problème d'optimisation **(situation extraite du livre Hyperbole 2^{e}) :**

On prend AB = 4 cm et AC = 3 cm.
L'aire du triangle ABC est égale à 6 cm^2.
L'aire du rectangle AHMK est toujours inférieure ou égale à 6 cm^2.

Déterminer la position du point M pour que l'aire de AHMK soit maximale.

Il faut introduire une fonction. On pose BM = x.
On pose $f(x)$ = aire du rectangle AHMK.

On dit que la fonction f est **majorée** par 6.