Produit vectoriel dans l'espace

Dans tout le chapitre, on note E l'espace et W *l'ensemble des vecteurs de l'espace.*

I. Orientation de l'espace

On décide de classer les bases de l'espace en deux classes : directes et indirectes.

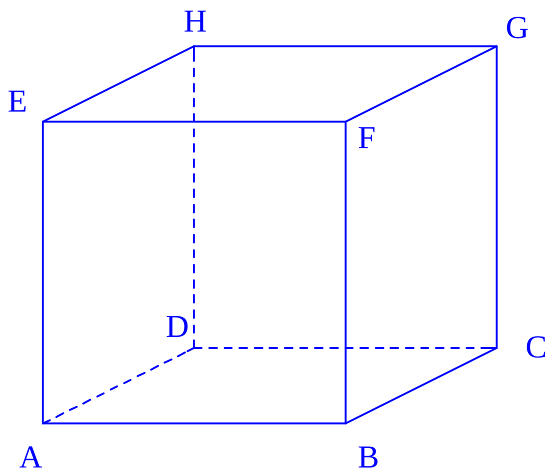
1°) Définition

On dit qu'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace est **directe** si et seulement si un observateur placé sur $\vec{k}$, avec les pieds en l'origine de $\vec{k}$ et la tête en l'extrémité voit la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ directe (règle du bonhomme d'Ampère, règle du tire-bouchon et des trois doigts).

Notion de trièdre direct/indirect

2°) Exemple

ABCDEFGFH est un cube tel que la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ soit directe.



La base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\right)$ est directe.

La base $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CG}\right)$ est directe.

La base $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BF}\right)$ est indirecte.

Dans toute la suite, l'espace E est orienté.

II. Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ainsi défini :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur vérifiant les 3 conditions :

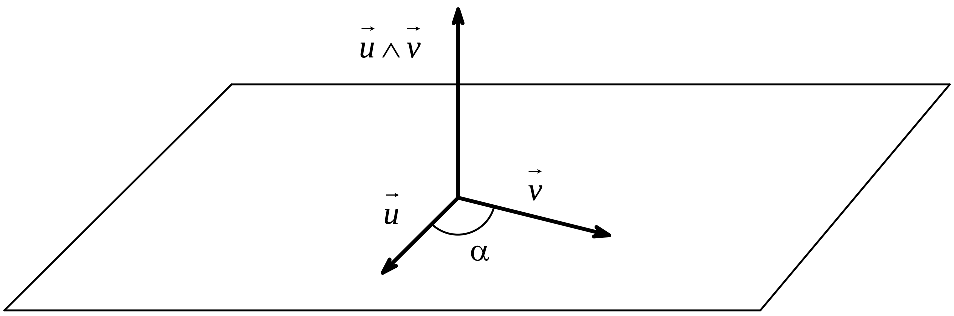
① $\left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times \sin\left(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}\right)$

② la base $\left(\vec{u} ; \vec{v} ; \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ soit directe

③ $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

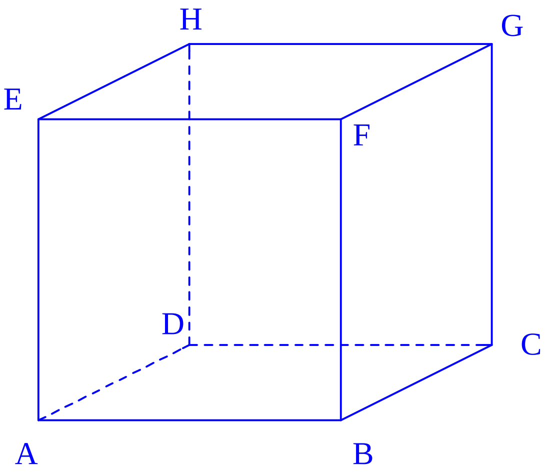
Commentaire :

Pour l'angle $\left(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}\right)$, il s'agit d'un angle non orienté de vecteurs. Il n'est pas possible de définir des angles orientés de vecteurs dans l'espace ; on remarquera que dans ce cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.



Exemple :

ABCDEFGFH est un cube d'arête 1 tel que la base $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$ soit directe.



$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dont la norme est égale à $AB \times AD \times \sin \widehat{BAD}$.
Or $(AB) \perp (AD)$ donc $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{2}$. Par suite, $\sin \widehat{BAD} = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.

$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BF}$

Méthode pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs :

On regarde si les deux vecteurs sont colinéaires.
S'ils ne le sont pas, on détermine sens, direction et norme.

III. Propriétés

1°) Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

À mettre à part

2°) Propriété 2

$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in W^2 \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ (antisymétrie)

3°) Propriété 3

$\forall \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \in W^3 \quad \vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Une conséquence de cette propriété :

$\forall \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right) \in W^4 \quad \left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) \wedge \left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{v_2}$

4°) Propriété 4

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v}\right)\in \mathcal{W}^{2} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \left(\lambda\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$$

Les propriétés 3 et 4 constituent la **bilinéarité** du produit vectoriel.

5°) Propriété 5 [Formule du double produit vectoriel]

$$\forall\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\in \mathcal{W}^{3} \quad \vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\bullet\vec{w}\right)\vec{v}-\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)\vec{w}$$

IV. Expression analytique du produit vectoriel

On considère une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace.

Faire une figure d'une base orthonormée directe.

1°) On a :

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

2°) On considère deux vecteurs $\vec{u}\left(x\,;y\,;z\right)$ et $\vec{v}\left(x'\,;y'\,;z'\right)$.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$=\left(x\vec{i}\right)\wedge\left(x'\vec{i}\right)+\left(x\vec{i}\right)\wedge\left(y'\vec{j}\right)+\left(x\vec{i}\right)\wedge\left(z'\vec{k}\right)+\left(y\vec{j}\right)\wedge\left(x'\vec{i}\right)+\left(y\vec{j}\right)\wedge\left(y'\vec{j}\right)+\left(y\vec{j}\right)\wedge\left(z'\vec{k}\right)+\left(z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}\right)+\left(z\vec{k}\right)\wedge\left(y'\vec{j}\right)$$
$$+\left(z\vec{k}\right)\wedge\left(z'\vec{k}\right)$$

$$=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$

$$=\left(yz'-zy'\right)\vec{i}+\left(zx'-xz'\right)\vec{j}+\left(xy'-yx'\right)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k} \qquad \text{(écriture à l'aide de déterminants)}$$

On retient la propriété.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

V. Applications

1°) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient colinéaires.

On munit l'espace d'une base directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}=0 \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

2°) Équation cartésienne d'un plan

On munit l'espace d'un repère orthonormée direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne un point $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ ainsi que deux vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ non colinéaires.
On note P le plan de repère $\left(\mathrm{A}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal à P.

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\bullet\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-x_0\right)\times\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}-\left(y-y_0\right)\times\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}+\left(z-z_0\right)\times\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$$

3°) Aire d'un triangle et d'un parallélogramme

On considère un triangle ABC de l'espace.

On sait que $\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\text{BA} \times \text{BC} \times \sin\widehat{\text{BAC}}$ (formule vue en 1ère).

Donc $\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}} \right\|$.

$\forall (\text{A, B, C}) \in E^3 \quad \mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}} \right\|$

Exemple :

On considère les points A(1 ; 0 ; 5), B(– 2 ; 3 ; 4) et C(3 ; 5 ; – 1).

Calculer l'aire de ABC.

$$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \frac{\sqrt{1010}}{2}$$

L'aire d'un parallélogramme ABCD est donnée par la formule $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AD}} \right\|$.

4°) Distance d'un point à une droite

5°) Application en électromagnétisme : la force de Lorentz

$\vec{\text{F}} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{\text{B}}\right)$

Exercices

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté *E*.

Démontrer que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ équivaut à $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Soit A, B, C, D quatre points quelconques de l'espace orienté *E*.
Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit A,B,C trois points fixés de l'espace orienté *E*.
On considère l'application $\vec{\varphi}$ de *E* dans $\vec{E}$: $M \mapsto \overrightarrow{\varphi(M)} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.
Démontrer que $\vec{\varphi}$ est constante.
À quelle condition $\vec{\varphi}$ est-elle nulle ?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Soit A et B deux points de l'espace orienté *E*.
Déterminer l'ensemble *F* des points M de *E* tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 dans l'espace orienté.
Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BH}$.

Solutions

1

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (c'est-à-dire différents du vecteur nul).

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}\end{aligned}$$

On suppose que l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.
On a : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} &= \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\wedge\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BD}\wedge\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(M)} &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} \\ &= \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\wedge\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right) \\ &= \overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{CA} \\ &= -\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{\varphi(M)}$ ne dépend pas de M. Par conséquent, $\vec{\varphi}$ est constante.

$$\begin{aligned}\forall M\in E\ \ \overrightarrow{\varphi(M)}=\vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{CA}=\vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\text{ et }\overrightarrow{CA}\text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \text{A, B, C alignés}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$

L’ensemble F est la droite (AB).