Racines carrées d'un nombre complexe

Le 9 février 2021

① Rappel de la racine carrée d'un réel

Soit a un réel positif ou nul.
On appelle racine carrée de a l'unique réel positif ou nul dont le carré est égal à a.

② Définition [racines carrées d'un complexe]

Soit z_0 un nombre complexe.
On appelle racine carrée (complexe) de z_0 tout nombre complexe z tel que $z^2 = z_0$.

③ Exemples

a) $z^2 = 4$
Les solutions de l'équation sont 2 et – 2.

Les racines carrées complexes de 4 sont 2 et – 2.

b) $z^2 = -9$
Les solutions de l'équation sont 3i et – 3i.

Les racines carrées complexes de – 9 sont 3i et – 3i (déjà vu dans le chapitre « Nombres complexes (1) » dans le paragraphe sur le second degré).

On n'écrit pas $\sqrt{-9}$.

Remarque : Au XVII$^{\text{e}}$ siècle et au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, on écrivait racine de – 1 à la place de i. On ne le fait plus du tout aujourd'hui.

Règle sur racines carrées complexes d'un réel *a* (déjà vue) **:**

Il y a trois cas suivant le signe de a.
- Si $a > 0$, les racines carrées complexes de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, la racine carrée de a est 0.
- Si $a < 0$, les racines carrées complexes de a sont $\text{i}\sqrt{-a}$ et $-\text{i}\sqrt{-a}$.

② Définition [racines cubiques d'un complexe]

Soit z_0 un nombre complexe.
On appelle racine cubique de z_0 tout nombre complexe z tel que $z^3 = z_0$.

On définit de même les racines quatrièmes, cinquièmes, sixièmes… d'un nombre complexe.

Soit z_0 un nombre complexe et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle racine n-ième de z_0 tout nombre complexe z tel que $z^n = z_0$.

Nous parlerons plus tard des racines n-ièmes de l'unité.

I. Exemple

Déterminons les racines carrées de $3+4\text{i}$.

On cherche les nombres complexes z tels que $z^2 = 3+4\text{i}$ (E).

On se garde d'écrire $z = \sqrt{3+4\text{i}}$ ou $z = -\sqrt{3+4\text{i}}$.

On pose $z = x + \text{i}y$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

(E) $\Leftrightarrow (x+\text{i}y)^2 = 3+4\text{i}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\text{i}xy - y^2 = 3+4\text{i}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\text{i}xy - y^2 = 3+4\text{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2yx = 4 \end{cases}$ (identification des partie réelle et imaginaire)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Ce système est un système non linéaire. On ne peut le résoudre que par substitution.

(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 & (1) \\ y = \dfrac{2}{x} & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x^4 - 4 = 3x^2$

$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad (1')$

On résout l'équation $(1')$.

Il s'agit d'une équation bicarrée.

On pose $X = x^2$.

L'équation $(1')$ s'écrit $X^2 - 3X - 4 = 0$.

Les racines sont – 1 et 4.

$(1') \Leftrightarrow x^2=-1$ (impossible car $x\in\mathbb{R}$) ou $x^2=4$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

On a alors :

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=\dfrac{2}{-2}=-1 \end{cases}$$

On obtient ainsi la forme algébrique des racines carrées de $3+4\text{i}$.

Conclusion :

Les racines carrées de $3+4\text{i}$ sont $2+\text{i}$ et $-2-\text{i}$.

On obtient deux racines complexes opposées.

Attention, ne jamais écrire $\sqrt{3+4\text{i}}$ car il y a deux racines carrées.

Calculatrice TI 83 :

La touche $\sqrt{\ }$ donne la racine carrée $2+\text{i}$.

On écrit diectement $\sqrt{3+4\text{i}}$ sans mettre la calculatrice en mode radian.

En revanche, pour $\sqrt{-4}$, on est obligé de mettre la calculatrice en mode complexe sinon on obtient un message d'erreur.

II. Méthode pratique plus rapide

1°) On reprend l'exemple du **I**.

On cherche les nombres complexes z tels que $z^2=3+4\text{i}$ (E).

On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 & (1) \\ 2xy=4 & (2) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases} \leftarrow \text{égalité de modules (l'explication est donnée ci-dessous)}$$

$z^2=3+4\text{i} \Rightarrow |z^2|=|3+4\text{i}|$

Or $|3+4\text{i}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ et $|z^2|=|z|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$ (rappel : $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$).

(2) permet de dire que x et y sont de même signe (car leur produit est positif).
(1) et (3) donnent facilement x et y par addition et soustraction membre à membre.

$$\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \end{cases}$$

Explication :

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & (1) \\ x^2+y^2=5 & (3) \end{cases}$$

On additionne membre à membre les égalités (1) et (3) [somme des membres de gauche = somme des membres de droite].
On obtient $x^2+x^2\cancel{-y^2}+\cancel{y^2}=3+5$ soit $2x^2=8$ d'où $x^2=4$.

On soustrait membre à membre les égalités (1) et (3) en faisant équation (3) e [différence des membres de gauche = différence des membres de droite].
On obtient $\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+y^2+y^2=5-3$ soit $2y^2=2$ d'où $y^2=1$.

$x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

$y^2=1 \Leftrightarrow y=1$ ou $y=-1$

On a à priori 4 combinaisons possibles : ($x=2$ et $y=1$) ou ($x=2$ et $y=-1$) et ($x=-2$ et $y=1$) ou ($x=-2$ ou $y=-1$).

On ne retient que deux combinaisons compte tenu de la condition « x et y sont de même signe ».

$$\text{Donc } \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

On retrouve les deux racines carrées de $3+4\text{i}$ obtenues dans le **I** : $2+\text{i}$ et $-2-\text{i}$.

2°) Bilan

On retiendra la méthode qui consiste non pas à résoudre le système formé par les équations (1) et (2) qui conduirait à la résolution d'une équation du 4e degré (bicarrée) mais à rajouter l'équation (3) obtenue par égalité de module qui permet une résolution plus facile.

III. Propriété

Tout nombre complexe admet deux racines carrées opposées.

IV. Cas particulier : racines carrées d'un réel

On pose $z = x_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $x_0 > 0$, les racines carrées complexes de z sont $\sqrt{x_0}$ et $-\sqrt{x_0}$.
- Si $x_0 = 0$, la racine carrée de z est 0.
- Si $x_0 < 0$, les racines carrées complexes de z sont $\mathrm{i}\sqrt{-x_0}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-x_0}$.

Calculatrice I 83 :

Pour obtenir les racines carrées de – 9, se placer en mode $a + bi$ ou taper $-9+0\mathrm{i}$.

V. Application : équation du second degré à coefficients complexes

VI. Technique utilisant la forme exponentielle

Voir plus tard

Exercices

1 Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme algébrique :
$8-6\mathrm{i}$; – 4 ; $7+24\mathrm{i}$; 9 ; i.
Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice ou du site dcode.

2 équation bicarrée à coefficients réels

3 Déterminer les racines cubiques de 1 sous forme algébrique.

Solution

$\boxed{1}$ Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants sous forme algébrique :
$8-6\text{i}$; -4 ; $7+24\text{i}$; 9 ; i.
Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

- Les racines carrées complexes de $8-6\text{i}$ sont $3-\text{i}$ et $-3+\text{i}$.

On n'écrit pas $\sqrt{8-6\text{i}}$.

- Les racines carrées complexes de -4 sont 2i et -2i.
- Les racines carrées complexes de $7+24\text{i}$ sont $4+3\text{i}$ et $-4-3\text{i}$.
- Les racines carrées complexes de 9 sont 3 et -3.
- Les racines carrées complexes de i sont $\dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}$.

Déterminons les racines complexes de $8-6\text{i}$.

On cherche les nombres complexes z tels que $z^2=8-6\text{i}$ (1).

On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=-6 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

On résout le système $\begin{cases} x^2-y^2=8 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ avec la condition x et y de signes contraires (à cause du produit).

Par addition puis soustraction (deuxième équation – première équation) membre à membre, on obtient $\begin{cases} 2x^2=18 \\ 2y^2=2 \end{cases}$ (calcul de tête) qui donne $\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=1 \end{cases}$.

Avec la condition des signes, on obtient $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$.

Les racines carrées complexes de $8-6\text{i}$ sont $3-\text{i}$ et $-3+\text{i}$.

- Déterminons les racines carrées complexes de $7+24\text{i}$.

On cherche les nombres complexes z tels que $z^2=7+24\text{i}$ (1).

On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=7 \\ 2xy=24 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

On résout le système $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ avec la condition x et y de même signe (à cause du produit).

Par addition puis soustraction (deuxième équation – première équation) membre à membre, on obtient $\begin{cases} 2x^2=32 \\ 2y^2=18 \end{cases}$ (calcul de tête) qui donne $\begin{cases} x^2=16 \\ y^2=9 \end{cases}$.

Avec la condition des signes, on obtient $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$.

Les racines carrées complexes de $7+24\text{i}$ sont $4+3\text{i}$ et $-4-3\text{i}$.

- Déterminons les racines carrées complexes de i.

On cherche les nombres complexes z tels que $z^2=\text{i}$ (1).

On pose $z=x+\text{i}y$ avec $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

On résout le système $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ avec la condition x et y de même signe (à cause du produit).

Par addition puis soustraction (deuxième équation – première équation) membre à membre, on obtient $\begin{cases} 2x^2=1 \\ 2y^2=1 \end{cases}$ (calcul de tête) qui donne $\begin{cases} x^2=\dfrac{1}{2} \\ y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Avec la condition des signes, on obtient $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Les racines carrées complexes de i sont $\dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}$.

Équations du second degré à coefficients complexes

I. Cas général

1°) Résolution

On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ (E) avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

(E) $\Leftrightarrow \left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$ avec $\Delta=b^2-4ac$.

On note δ une racine carrée complexe de Δ donc $\delta^2=\Delta$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\\
&\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z+\frac{b}{2a}=-\frac{\delta}{2a}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b-\delta}{2a}
\end{aligned}$$

2°) Formules

(E) admet deux racines distinctes ou confondues dans $\mathbb{C}$:

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ.

3°) Remarque

Le cas où a, b, c sont réels est un cas particulier de ce cas général.

4°) Formules avec le discriminant réduit

On pose $b=2b'$.

Le discriminant réduit est $\Delta'=(b')^2-ac$.

Les racines complexe de (E) sont $z_1=\dfrac{-b'-\delta'}{a}$ et $z_2=\dfrac{b'+\delta'}{a}$ où δ' est une racine carrée de Δ'.

II. Exemples

1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\mathrm{i}z^2-3z-1-3\mathrm{i}=0$.

Il s'agit d'une équation à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$a=2\mathrm{i}$ $\qquad b=-3$ $\qquad c=-1-3\mathrm{i}$

On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta&=(-3)^2-4\times(2\mathrm{i})\times(-1-\mathrm{i})\\
&=9-8\mathrm{i}\times(-1-\mathrm{i})\\
&=-15+8\mathrm{i}
\end{aligned}$$

On cherche une racine carrée de $-15+8\mathrm{i}$.

$1^{\text{ère}}$ méthode (rapide) :

On utilise la calculatrice.

La calculatrice fournit la racine $1+4\mathrm{i}$.

2^{e} méthode (plus longue) :

On cherche « à la main » les racines carrées de $-15+8\mathrm{i}$.

Autrement dit, il faut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2=-15+8\mathrm{i}$.

On pose $Z=\alpha+\mathrm{i}\beta$ où α et β sont deux réels.

On a : $(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2=-15+8\mathrm{i}$.

Cette égalité donne $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-15 & (1)\\ 2\alpha\beta=8 & (2)\end{cases}$.

On rajoute une égalité de modules :

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=\sqrt{15^2+8^2}\\&=17\quad(3)\end{aligned}.$$

(2) donne α et β de même signe.

(1) et (3) donnent par addition et soustraction membre à membre :

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2=17-15$$
$$2\alpha^2=2$$
$$\alpha=1 \quad \text{ou} \quad \alpha=-1$$

$$2\beta^2=17-(-15)$$
$$2\beta^2=32$$
$$\beta=4 \quad \text{ou} \quad \beta=-4$$

Grâce à la condition « α et β de même signe » (tirée de (2)), on obtient les racines carrées suivantes $1+4\text{i}$ et $-1-4\text{i}$.

$1+4\text{i}$ est une racine carrée de Δ.

L'équation (E) a pour racines :

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{3+(1+4\text{i})}{4\text{i}}\\&=\frac{4+4\text{i}}{4\text{i}}\\&=\frac{1+\text{i}}{\text{i}}\\&=-\text{i}+1\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}z_2&=\frac{3-(1+4\text{i})}{4\text{i}}\\&=\frac{2-4\text{i}}{4\text{i}}\\&=\frac{1-2\text{i}}{2\text{i}}\\&=-\frac{1}{2}\text{i}-1\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S=\left\{-\text{i}+1\,;-\frac{1}{2}\text{i}-1\right\}$$

2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\text{i}z-1+2\text{i}=0$.

Il s'agit d'une équation à coefficients dans $\mathbb{C}$.

$a=1 \qquad b=-2\text{i} \qquad c=-1+2\text{i}$

On utilise le discriminant réduit.

$b'=-\text{i}$

On calcule le discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta'&=(-\text{i})^2-1\times(-1+2\text{i})\\&=-1-(-1+2\text{i})\\&=-1+1-2\text{i}\\&=-2\text{i}\end{aligned}$$

On cherche une racine carrée (complexe) de – 2i.

1ère méthode (rapide) :

On utilise la calculatrice.

La calculatrice fournit $1-\text{i}$ pour racine carrée (c'est une racine carrée complexe).

On notera que celle-ci peut presque se trouver de tête.

2e méthode (plus longue) :

On cherche « à la main » les racines carrées de -2i.

L'équation (E) a pour racines :

$$\begin{aligned}z_1&=\text{i}-(1-\text{i})\\&=\text{i}-1+\text{i}\\&=2\text{i}-1\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}z_2&=\text{i}+(1-\text{i})\\&=\text{i}+1-\text{i}\\&=1\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S=\{1\,;2\text{i}-1\}$$

III. Somme et produit des racines

On considère l'équation $az^2+bz+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
On note z_1 et z_2 ses racines complexes.

On a :

$$\boldsymbol{z_1+z_2=-\frac{b}{a}} \qquad \textbf{et} \qquad \boldsymbol{z_1z_2=\frac{c}{a}}.$$

III. Factorisation d'un polynôme du second degré

On considère un polynôme az^2+bz+c avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
On note z_1 et z_2 ses racines complexes.

$\forall z\in\mathbb{C}\qquad az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

Exercices

$\boxed{1}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(3+2\mathrm{i})z+5+\mathrm{i}=0\quad(1)$.

$\boxed{2}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z\cos\theta+1=0\quad(1)$ où θ est un réel.

Solutions

$\boxed{1}$ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(3+2\mathrm{i})z+5+\mathrm{i}=0\quad(1)$.

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficient dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[-(3+2\mathrm{i})\right]^2-4\times(5+\mathrm{i})\\&=(3+2\mathrm{i})^2-20-4\mathrm{i}\\&=-15+8\mathrm{i}\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne $(1+4\mathrm{i})^2=-15+8\mathrm{i}$ [il s'agit du même nombre complexe que dans le cours].

L'équation (1) a pour racines :

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{3+2\mathrm{i}+(1+4\mathrm{i})}{2}\\&=2+3\mathrm{i}\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}z_2&=\frac{3+2\mathrm{i}-(1+4\mathrm{i})}{2}\\&=1-\mathrm{i}\end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{2+3\mathrm{i}\,;1-\mathrm{i}\}$

$\boxed{2}$ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2z\cos\theta+1=0\quad(1)$.

(1) est une équation du second degré à coefficients réels que l'on va résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\Delta'&=\cos^2\theta-1\\&=-\sin^2\theta\end{aligned}$$

Une racine carrée de Δ' est $\delta'=\mathrm{i}\sin\theta$.

Les racines de (1) sont :

$$\begin{aligned}z_1&=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{aligned}\qquad\text{et}\qquad\begin{aligned}z_2&=\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\end{aligned}$$

En effet, par définition de la notation exponentielle pour les complexes on a : $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (voir chapitre « Complexes (3) ».
De même, $\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\}$