TS

Exercices sur les équations différentielles (1)

$\boxed{1}$ On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3}+y=x^3$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $y'+5y=9\mathrm{e}^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{3}$ Résoudre l'équation différentielle $y'=3y$.

$\boxed{4}$ Résoudre l'équation différentielle $2y'=-y$.

$\boxed{5}$ Résoudre l'équation différentielle $2y'=5y$.

$\boxed{6}$ Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'+2y=0$ telle que $f(0)=1$.

$\boxed{7}$ Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'=7y$ telle que $f(1)=\mathrm{e}$.

Corrigé des exercices sur les équations différentielles (1)

1

$$\frac{y'}{3}+y=x^3 \text{ (E)}$$

Démontrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

Méthode : on commence par dériver f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=3x^2-2x+\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{3}+f(x)&=\frac{3x^2-2x+\frac{2}{3}}{3}+x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\\&=\cancel{x^2}\cancel{-\frac{2}{3}x}+\frac{2}{9}+x^3\cancel{-x^2}\cancel{+\frac{2}{3}x}-\frac{2}{9}\\&=x^3\end{aligned}$$

Donc **la fonction f est une solution particulière de (E)**.

Attention à ne pas dire :
« $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ » ou « $f(x)$ est une solution particulière de (E) ».

2

$$y'+5y=9e^{-2x} \text{ (E)}$$

Démontrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)&=3\times(-2)\,e^{-2x}\\f'(x)&=-6\,e^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)+5f(x)&=-6e^{-2x}+5\times3e^{-2x}\\&=-6e^{-2x}+15e^{-2x}\\&=9e^{-2x}\end{aligned}$$

Donc la fonction f est une solution particulière de (E).

3

$$y'=3y \text{ (E)}$$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=3$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{3x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

N.B. : Ne pas écrire $S=\ldots$

4

$$2y'=-y \text{ (E)}$$

(E) s'écrit $y'=-\frac{1}{2}y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-\frac{1}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{-\frac{1}{2}x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

5

$$2y'=5y \text{ (E)}$$

(E) s'écrit $y'=\frac{5}{2}y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=\frac{5}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{\frac{5}{2}x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

6

$$y'+2y=0 \text{ (E)}$$

(E) s'écrit $y'=-2y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-2$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{-2x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}f(0)=1 &\Leftrightarrow ke^{-2\times0}=1\\&\Leftrightarrow k\times1=1\\&\Leftrightarrow k=1\end{aligned}$$

La fonction f solution de (E) vérifiant $f(0)=1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}$.

$\boxed{7}$

$y'=7y$ (E)

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec a = 7.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{7x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(1)=\mathrm{e} &\Leftrightarrow k\mathrm{e}^{7\times 1}=\mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow k\times\mathrm{e}^{7}=\mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow k=\mathrm{e}^{-6} \end{aligned}$$

La fonction f solution de (E) vérifiant $f(1)=\mathrm{e}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-6}\times\mathrm{e}^{7x}$ soit $f(x)=\mathrm{e}^{7x-6}$.

Commentaires sur les exercices $\boxed{6}$ et $\boxed{7}$:
La résolution s'effectue en 2 étapes : recherche de la solution générale d'abord ; recherche de la solution particulière sous la forme d'une chaîne d'équivalence ; enfin conclusion.

Classification des exercices par compétences

- Comprendre ce que signifie résoudre une équation différentielle (c'est déterminer toutes les fonctions …).
- Savoir déterminer si une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Savoir résoudre une équation différentielle du type $y'=ay$.
- Savoir déterminer une solution d'équation différentielle du type $y'=ay$ vérifiant une condition initiale.

Ce chapitre sur les équations différentielles permet de travailler la rédaction en analyse (il est demandé d'apprendre les phrases de rédaction mot pour mot).

Voici des exemples de mauvaises résolutions :

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y' = 3y$ (1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad (1) \quad &\Leftrightarrow \quad y' - 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f'(x) - 3f(x) = 0\,. \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = k\mathrm{e}^{3x} \end{aligned}$$