Changement de repère

I. Changement de repère par translation

1°) Propriétés

Le plan est muni d'un repère $\boldsymbol{R} = \left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère le repère $\boldsymbol{R}' = \left(\text{O}', \vec{i}, \vec{j}\right)$ où O' est le point de coordonnées $\left(x_0 \,;\, y_0\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}$.

Le nouveau repère a une nouvelle origine mais les mêmes vecteurs de base que $\boldsymbol{R}$.

Soit M un point quelconque du plan, $\left(x \,;\, y\right)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{R}$ et $\left(X \,;\, Y\right)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{R}'$.

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{x = X + x_0} \\ \boldsymbol{y = Y + y_0} \end{cases}$.

On dit que l'on a établi les **formules de changement de repère**.
On a exprimé les « anciennes » coordonnées (c'est-à-dire les coordonnées dans l'ancien repère $\boldsymbol{R}$) en fonction des « nouvelles » coordonnées (c'est-à-dire les coordonnées dans le nouveau repère $\boldsymbol{R}'$).

2°) Démonstration

O' a pour coordonnées $\left(x_0 \,;\, y_0\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ donc $\overrightarrow{\text{OO}'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

M a pour coordonnées $\left(x \,;\, y\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}$ donc $\overrightarrow{\text{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1).

M a pour coordonnées $\left(X \,;\, Y\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}'$ donc $\overrightarrow{\text{O'M}} = X\vec{i} + Y\vec{j}$.

D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OO}'} + \overrightarrow{\text{O'M}}$.
Donc $\overrightarrow{\text{OM}} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j}$ soit $\overrightarrow{\text{OM}} = \left(x_0 + X\right)\vec{i} + \left(y_0 + Y\right)\vec{j}$ (2).

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base*, on a $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$.

* On veut dire par là que l'égalité $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ entraîne $x = x'$ et $y = y'$.

II. Changement de repère quelconque

1°) Propriétés

Le plan est muni d'un repère $\boldsymbol{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $\mathrm{O'}$ le point de coordonnées $\left(x_0 \,;\, y_0\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}$.

On considère deux vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ définis par $\vec{I} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{J} = c\vec{i} + d\vec{j}$ où *a*, *b*, *c*, *d* sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$ (cette condition traduit que les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ne sont pas colinéaires.

On note $\boldsymbol{R}'$ le repère $\left(\mathrm{O'}, \vec{I}, \vec{J}\right)$.

Soit M un point quelconque du plan, $\left(x \,;\, y\right)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{R}$ et $\left(X \,;\, Y\right)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{R}'$.

On a : $\begin{cases} x = aX + cY + x_0 \\ y = bX + dY + y_0 \end{cases}$.

Les formules de changement de repère s'écrivent aisément avec les matrices (étudiées en spécialité mathématiques en Terminale).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2°) Démonstration

$\mathrm{O'}$ a pour coordonnées $\left(x_0 \,;\, y_0\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$.

M a pour coordonnées $\left(x \,;\, y\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1).

M a pour coordonnées $\left(X \,;\, Y\right)$ dans le repère $\boldsymbol{R}'$ donc $\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = X\vec{I} + Y\vec{J}$.

D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'M}}$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) + Y\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \left(aX + cY + x_0\right)\vec{i} + \left(bX + dY + y_0\right)\vec{j}$ (2).

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base*, on a $\begin{cases} x = aX + cY + x_0 \\ y = bX + dY + y_0 \end{cases}$.

Exercices

$\boxed{1}$ Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 4x - 3$ dans un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

1°) Déterminer les coordonnées de S dans le repère $\mathcal{R}$.

2°) On note $\mathcal{R}'$ le repère $\left(\mathrm{S}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Soit M un point quelconque du plan, $(x\ ;y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X\ ;Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}'$.
Exprimer x et y en fonction de X et Y. (appliquer directement les formules du **I**).

b) Déterminer alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sous la forme $Y = f(X)$.

On rédigera suivant le modèle suivant : « M $\in \mathcal{C}$ si et seulement si ……

si et seulement si …… ».

$\boxed{2}$ Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ dans un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On note O' le point de coordonnées (1 ; 2) dans le repère $\mathcal{R}$.

On note $\mathcal{R}'$ le repère $\left(\mathrm{O}', \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit M un point quelconque du plan, $(x\ ;y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X\ ;Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}'$.
Exprimer x et y en fonction de X et Y.

2°) Déterminer alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sous la forme $Y = f(X)$.

$\boxed{3}$ Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x + \dfrac{1}{x}$ dans un repère $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

On note $\mathcal{R}'$ le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i} + \vec{j}, \vec{j}\right)$.

1°) Soit M un point quelconque du plan, $(x\ ;y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X\ ;Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}'$.
Exprimer x et y en fonction de X et Y. Refaire la démonstration.

2°) Déterminer alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ sous la forme $Y = f(X)$.