# Produit maximal de deux nombres connaissant leur somme

# Partie A

## I. Propriété (« règle du produit maximal »)

**Problème : Étant donnés deux nombres de somme fixée, comment faut-il les choisir pour que leur produit soit maximal ?**

### 1°) Énoncé

**Le produit de deux nombres dont la somme est constante est maximal lorsqu'ils sont égaux.**

### 2°) Démonstration (dans le cadre algébrique*)

$x$ et $y$ sont deux réels tels que $x + y = a$ où $a$ est un réel fixé.

On cherche $x$ et $y$ tels que le produit $xy$ soit maximal.

a) **Une identité à connaître :**

$$\boxed{xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}}$$

On démontre cette formule en développant le membre de droite.
On montre ainsi que l'on obtient le membre de gauche.

Cette formule permet – entre autre – de calculer le produit de deux nombres connaissant leur somme et leur différence (sans calculer ces deux nombres).

b) **Conséquence :**

On a : $xy = \dfrac{a^2 - (x-y)^2}{4}$.

Or $(x-y)^2 \geqslant 0$ d'où $-(x-y)^2 \leqslant 0$

Par suite, on a : $a^2 - (x-y)^2 \leqslant a^2$.

D'où $\dfrac{a^2-(x-y)^2}{4} \leqslant \dfrac{a^2}{4}$.

On en déduit que : $xy \leqslant \dfrac{a^2}{4}$.

Il y a égalité si et seulement si $x - y = 0$ soit $x = y$.

Dans ce cas, $x = y = \dfrac{a}{2}$ et $xy = \dfrac{a^2}{4}$.

## 3°) Autre démonstration possible (dans le cadre des fonctions*)

Avec une étude de fonction (fonction polynôme du second degré).

La condition $x + y = a$ donne $y = a - x$.
Donc $xy = x(a - x) = ax - x^2$.

On considère la fonction $f : x \mapsto ax - x^2$.

Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré.

On connaît les variations d'une fonction polynôme du second degré.

On calcule donc la valeur charnière : $-\dfrac{a}{2\times(-1)} = \dfrac{a}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{a}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | $\dfrac{a^2}{4}$ | $\searrow$ | |

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = a\times\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

La fonction $f$ atteint un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en $\dfrac{a}{2}$.

Donc le produit $xy$ est maximal lorsque $x = \dfrac{a}{2}$.

Dans ce cas, on a : $y = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Donc le produit $xy$ est maximal lorsque $x = y = \dfrac{a}{2}$.

## II. Application à un problème d'optimisation célèbre

**Problème : Parmi tous les rectangles de périmètre donné, quel est celui qui a la plus grande aire ?**

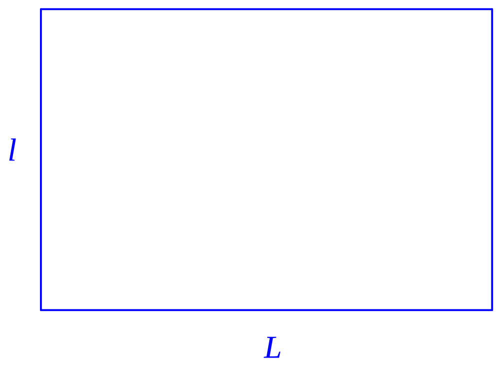
### 1°) Propriété

**Parmi tous les rectangles de périmètre donné, celui qui a la plus grande aire est le carré.**

### 2°) Démonstration

On considère un rectangle de périmètre $P$ donné.

Soit $l$ la largeur du rectangle et $L$ sa longueur.




On a $2(l + L) = P$ d'où $l + L = \frac{P}{2}$.

L'aire du rectangle est égale à $l \times L$.

D'après la « règle du produit maximal », l'aire du rectangle est maximale lorsque $l = L = \frac{P}{4}$.

Dans ce cas, le rectangle est un carré (car un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré).

## III. Généralisation

La règle du produit maximal reste vraie pour le produit de $n$ nombres, $n$ étant un entier naturel strictement supérieur à 2.
La démonstration est cependant hors des connaissances de $1^{\text{ère}}$.

# Partie B

## I. Propriété

**Problème 2 :** Étant donné deux nombres dont la somme des carrés est constante, comment faut-il les choisir pour que leur produit soit maximal ?

### 1°) Énoncé

**Le produit de deux nombres dont la somme des carrés est constante est maximal lorsqu'ils sont égaux.**

### 2°) Démonstration (dans le cadre algébrique*)

$x$ et $y$ sont deux réels tels que $x^2 + y^2 = a$ où $a$ est un réel fixé (positif, bien entendu).

On cherche $x$ et $y$ tels que le produit $xy$ soit maximal.

a) **Une identité à connaître :**

$$\boxed{xy = \frac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{2}}$$

On démontre cette formule en développant le membre de droite.
On montre ainsi que l'on obtient le membre de gauche.

b) **Conséquence :**

On a : $xy = \dfrac{a-(x-y)^2}{4}$.

Or $(x-y)^2 \geqslant 0$ d'où $-(x-y)^2 \leqslant 0$

Par suite, on a : $a-(x-y)^2 \leqslant a$.

D'où $\dfrac{a-(x-y)^2}{2} \leqslant \dfrac{a}{2}$.

On en déduit que : $xy \leqslant \dfrac{a}{2}$.

Il y a égalité si et seulement si $x - y = 0$ soit $x = y$.

# Exercices

**1.** Soit $x$ et $y$ deux nombres tels que $x + y = 6$ et $x - y = 1$.
Déterminer $xy$ sans calculer les nombres $x$ et $y$.

**2.** Soit $x$ et $y$ deux nombres tels que $3x + 2y = 5$.
Déterminer $x$ et $y$ tels que $xy$ soit maximal.

**3.** Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R$.
Soit A et B deux points de $\mathcal{C}$ tels que $(OA) \perp (OB)$.
Pour tout point M de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, on note H et K les points appartenant respectivement à (OA) et à (OB) tels que OHMK soit un rectangle.
Déterminer la position du point M sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$, telle que l'aire de OHMK soit maximale.

**4.** Soit $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre [AB].
M est un point quelconque de $\mathcal{C}$.
Déterminer la position de M sur $\mathcal{C}$ telle que le périmètre du triangle ABM soit minimal.