Les grandes familles de fonctions

• Fonctions particulières : fonctions « carré », « cube »…

• Types de fonctions : affines, polynômes, rationnelles…

I. Fonctions polynômes

1°) Définition

On appelle **fonction polynôme** toute fonction *f* vérifiant les deux conditions :

C_1 : *f* est définie sur $\mathbb{R}$

C_2 : *f* admet une expression de la forme $f(x) = a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x^2 + ... + a_n \times x^n$ où a_0, a_1, …, a_n sont des réels.

2°) Vocabulaire

• L'expression $a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x^2 + ... + a_n \times x^n$ est appelée **polynôme** en *x* (*x* : **variable** du polynôme).

• Les réels a_0, a_1, …, a_n sont appelés les **coefficients** du polynôme.

• Lorsque tous les coefficients sont nuls, la fonction f est définie par $f(x) = 0$ pour tout réel *x*.
On dit que *f* est la **fonction polynôme nulle** (fonction constante nulle).

• Lorsque *f* n'est pas la fonction constante nulle, si l'on suppose que $a_n \neq 0$, on dit que *n* est le **degré** du polynôme ou de la fonction polynôme.

• On notera que la fonction polynôme nulle n'a pas de degré.

3°) Exemples

• $f : x \mapsto 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 5x + 1$ est une fonction polynôme de degré 5.
$a_0 = 1$, $a_1 = -5$, $a_2 = 1$, $a_3 = -4$, $a_4 = 0$, $a_5 = 3$

• $f : x \mapsto 3x - 1$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine)

• $f : x \mapsto 2$ est une fonction polynôme de degré 0 (fonction constante)

4°) Contre-exemples

Les fonctions « inverse », « valeur absolue », « racine carrée » ne sont pas des fonctions polynômes.

$f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 2 + \dfrac{5}{x}$ n'est pas une fonction polynôme.

5°) Cas particuliers

- Les fonctions affines non constantes sont des fonctions polynômes de degré 1.
- Les fonctions constantes non nulles sont des fonctions polynômes de degré 0 (fonction affine particulière)
- Les fonctions linéaires non nulles sont des fonctions polynômes de degré 1.

II. Les fonctions rationnelles

1°) Définition

On appelle **fonction rationnelle** le quotient de deux fonctions polynômes.

2°) Exemples

- $f : x \mapsto \dfrac{3+2x-5x^2}{x^3-1}$

- $f : x \mapsto 3x^2-2x+1=\dfrac{3x^2-2x+1}{1}$

3°) Contre-exemples

- $f : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x-3}$ fonction non rationnelle (racine carrée)

- $f : x \mapsto \dfrac{|\,x\,|}{x^2+1}$ fonction non rationnelle (valeur absolue)

4°) Cas particuliers

Toute fonction polynôme est une fonction rationnelle (réciproque fausse).

Les fonctions polynômes constituent une sous-famille de la famille des fonctions rationnelles.

5°) Une sous-famille importante de la famille des fonctions rationnelles : les fonctions homographiques

- **Définition :**

On appelle **fonction homographique** le quotient de deux fonctions affines, du type $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (avec a, b, c, d réels).
On peut aussi dire qu'une fonction homographique est le quotient de deux fonctions polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Les fonctions homographiques constituent une sous-famille de la famille des fonctions rationnelles.

• **Exemples :**

$f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

$f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x}$

$f : x \mapsto 3-\dfrac{2}{x}$

• Une sous-famille de la famille des fonctions homographiques est la famille des fonctions affines.

III. Stabilité des familles de fonctions pour l'intervalle

1°) Famille des fonctions polynômes

La famille des fonctions polynômes est stable par :
- l'addition ;
- le produit par un réel ;
- le produit.

Traduction :

• La somme de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.
• Le produit d'une fonction polynôme par un réel est une fonction polynôme.
• Le produit de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.

2°) Famille des fonctions rationnelles

La famille des fonctions rationnelles est stable par :
- l'addition ;
- le produit par un réel ;
- le produit de deux fonctions rationnelles ;
- les quotients.

Traduction :

• La somme de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.
• Le produit d'une fonction rationnelle par un réel est une fonction rationnelle.
• Le produit de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.
• Le quotient de deux fonctions rationnelles est une fonction rationnelle.

3°) Mise en garde (non stabilité)

La famille des fonctions polynômes n'est pas stable par le quotient ; en règle générale, le quotient de deux fonctions polynômes n'est pas une fonction polynôme (c'est une fonction rationnelle).

IV. Degré des fonctions polynômes

1°) Notation

Lorsque *f* est une fonction polynôme non nulle, on note $\deg(f)$ le degré de *f*.

2°) Propriétés admises sans démonstration

f et *g* sont deux fonctions polynômes non nulles.
λ est un réel non nul.

- $\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f \,;\, \deg g)$
- $\deg(\lambda \times f) = \deg(f)$
- $\deg(f \times g) = \deg(f) + \deg(g)$

3°) Stabilité des familles de fonctions pour la dérivation

• Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

La famille des fonctions polynômes est stable par dérivation (c'est-à-dire que la dérivée d'une fonction polynôme est une fonction polynôme ; de plus, si *f* est une fonction polynôme de degré *n*, alors $\deg(f\,') = n-1$.

• Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

La famille des fonctions rationnelles est stable par dérivation (c'est-à-dire que la dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle).

Exercices

Énoncés

$\boxed{1}$ À quelle famille* de fonctions appartient la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$?

$\boxed{2}$ À quelle famille* de fonctions appartient la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$?

* On donnera chaque fois la plus petite des sous-familles.

Solutions

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$

À priori, f est une fonction rationnelle.

$D_f = \mathbb{R}$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2\right)^2-1^2}{x^2+1}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x^2-1$$

On en déduit que f est une fonction polynôme du second degré (incomplet en x).

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$.

f est la somme de fonctions rationnelles donc f est une fonction rationnelle.

Remarque : on pourrait aussi écrire $f(x)$ sous la forme d'un seul quotient.
On ferait alors apparaître $f(x)$ comme quotient de deux polynômes.

$$f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-2}=\frac{3(x-2)-(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\frac{3x-6-x-1}{x^2-x-2}=\frac{2x-7}{x^2-x-2}$$

On utilise la deuxième des deux égalités ci-dessous :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

On effectue le produit $(x+3)(x-2)$ par calcul mental.