Suites arithmétiques et suites géométriques
Bilan et croissances

Exemples concrets d'application des S.G. ou des S.A. (Modélisations d'évolution)

I. Bilan sur les suites arithmétiques et géométriques

1°) Tableau de formules

Définition	Relation entre deux termes consécutifs	Calcul d'un terme
Suite arithmétique : c'est une suite de nombres u_0, u_1, u_2, … u_n où chacun (sauf le premier) s'obtient **en ajoutant** au précédent un nombre fixe ***r*** appelé la **raison**.	$\underbrace{u_{n+1} = u_n + r}_{}$ même *n*	$\underbrace{u_n = u_0 + nr}_{}$ même *n* $u_n = u_1 + (n-1) \times r$
Suite géométrique : c'est une suite de nombres u_0, u_1, u_2, … u_n où chacun (sauf le premier) s'obtient **en multipliant** le précédent par un nombre fixe ***q*** appelé la **raison**.	$\underbrace{u_{n+1} = u_n \times q}_{}$ même *n*	$\underbrace{u_n = u_0 \times q^n}_{}$ même *n* $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Pour une suite arithmétique, si lorsque l'on calcule la **différence** entre deux termes consécutifs et que pour chaque différence le résultat est le même ⇒ suite arithmétique

Pour une suite géométrique, si lorsque l'on calcule le **quotient** de deux termes consécutifs et que pour chaque quotient le résultat est le même ⇒ suite géométrique

2°) Utilisations concrètes des suites arithmétiques et géométriques

• Les suites arithmétiques et géométriques servent à modéliser de nombreuses situations : intérêts bancaires, phénomènes d'évolution, etc.

• Les suites arithmétiques servent à modéliser des situations où l'on étudie une grandeur dont la variation absolue est constante (cas des intérêts simples).

• Les suites géométriques servent à modéliser des situations où l'on étudie une grandeur dont la variation relative est constante (cas des intérêts composées) : la grandeur diminue ou augmente tout le temps du même pourcentage.

3°) Origine des noms arithmétique et géométrique avec les moyennes

• Dans une suite arithmétique, chaque terme (sauf le premier) est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent.
• Dans une suite géométrique, chaque terme (sauf le premier) est la moyenne géométrique de ceux qui l'encadrent.

4°) Une question de notation

Les **parenthèses** sont obligatoires pour noter une suite.

On parle de la suite (u_n).

Exemples d'utilisation :

« La suite (u_n) est arithmétique de raison … »
« La suite (u_n) est géométrique de raison … »

II. Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

1°) Cas d'une suite arithmétique

Le sens de variation de la suite dépend du signe de la raison.

Règle

• **Une suite arithmétique est <u>croissante</u> lorsque sa raison est positive ou nulle.**
• **Une suite arithmétique est <u>décroissante</u> lorsque sa raison est négative ou nulle.**

2°) Cas d'une suite géométrique

On considère une suite géométrique (u_n) telle que $u_0 > 0$ et $q > 0$ (il en sera toujours ainsi pour nous cette année).

Règle

• **Si $q > 1$, alors la suite est <u>croissante</u>.**
• **Si $0 < q < 1$, alors la suite est <u>décroissante</u>.**

III. Croissance - décroissance

1°) Croissance – décroissance linéaire

Lorsque l'évolution d'une grandeur peut être modélisée par une suite arithmétique, on parle de **croissance ou de décroissance linéaire** (suivant le signe de la raison).

La variation est dite « linéaire » car tous les points qui représentent la suite sont alignés sur une même droite (qui ne passe pas forcément par l'origine du repère).

2°) Croissance – décroissance exponentielle

Lorsque l'évolution d'une grandeur peut être modélisée par une suite géométrique, on parle de **croissance ou de décroissance exponentielle**.

La variation est dite « exponentielle » car le terme général s'exprime à l'aide d'un exposant ($u_n = u_0 \times q^n$).

Il s'agit d'évolutions rapides.

3°) Commentaire

Ces deux types de croissance sont très importants.
Ils servent à modéliser de nombreux phénomènes, essentiellement des **suites et des séries chronologiques** **(voir manuel pages 80 et 81)**. Dans de nombreux domaines (géographie, économie, statistiques, biologie etc.), on cherche à modéliser de nombreux phénomènes par des suites (notion de **« modélisation »**, de **« modèle mathématique »**).

Ils existent d'autres types de croissances ou de décroissances que nous n'étudierons pas cette année.

IV. Intérêts bancaires : intérêts composés, intérêts simples

1°) Définitions

- Un capital produit des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital.
- Un capital produit des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts. On dit aussi que les intérêts sont capitalisés.

2°) Exemples

● Exemple 1

Placement d'un capital de 100 € à un taux annuel de 5 % d'intérêts simples.

Chaque année les intérêts seront de : $100 \times \frac{5}{100} = 5$ €. Les intérêts sont fixes au cours du temps.
La 1$^{\text{ère}}$ année la valeur acquise par le capital est égale à 105 €.
La 2$^{\text{e}}$ année la valeur acquise par le capital est égale à 110 €.
Etc.

● Exemple 2

Placement d'un capital de 100 € à un taux annuel de 5 % d'intérêts composés.

Les intérêts seront de : $100 \times \frac{5}{100} = 5$ € la 1$^{\text{ère}}$ année.

Puis : $105 \times \frac{5}{100} = 5{,}25$ € la 2$^{\text{e}}$.
Etc.

La 1$^{\text{ère}}$ année la valeur acquise par le capital est égale à 105 €.
La 2$^{\text{e}}$ année la valeur acquise par le capital est égale à $105 + 5{,}25 = 110{,}25$ €.
Etc.

3°) Lien avec les suites

- L'évolution d'un capital placé à intérêt simple peut être modélisé par une **suite arithmétique croissante**.
  Dans ce cas, la valeur acquise par le capital suit une **croissance linéaire.**

- L'évolution d'un capital placé à intérêt composé peut être modélisé par une **suite géométrique croissante** (de raison $1 + \frac{t}{100}$ où t désigne le taux de placement).
  Dans ce cas, la valeur acquise par le capital suit une **croissance exponentielle.**

4°) Vocabulaire

- Les placements d'une durée inférieure à un an ont généralement des intérêts simples. Le taux annuel est désigné comme le **taux nominal** ou le **taux facial.**

- Les intérêts des placements de plus d'un an sont des intérêts composés. Le taux annuel est appelé **taux actuariel** ou **taux équivalent.**

V. Pour aller plus loin

On s'intéresse toujours à des phénomènes chronologiques.

1°) Croissances – décroissances linéaires

Modèle discret	Modèle continu
Situation modélisée par une suite arithmétique	Situation modélisée par une fonction affine*

* **Exemple :** la taille d'une plante est donnée en fonction du temps par $f(t) = \ldots$

2°) Croissances – décroissances exponentielles

Modèle discret	**Modèle continu**
Situation modélisée par une suite géométrique	*

* Pas pour nous cette année (utilise une fonction qui n’est pas connue en 1ère S).

Exercices bilans sur les suites arithmétiques et géométriques

1 À la naissance de leur fils en 2007, des parents bloquent une somme d'argent afin de pouvoir financer d'éventuelles études à sa majorité.
La banque B leur propose un placement à intérêts simples à 5 % par an.
La banque C leur propose un placement à intérêts composés à 4,5 % par an.
Ils décident de simuler un placement de 5 000 € dans chacune des deux banques.
On note B_n la somme disponible l'année $(2007+n)$ suite au placement dans la banque B et C_n la somme disponible l'année $(2007+n)$ suite au placement dans la banque C.

1°) a) Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n. Quelle est la nature de la suite (B_n) ? Préciser sa raison.

b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Préciser sa raison.

2°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.
Arrondir les résultats au centième dans la colonne de la banque C (à partir du moment où c'est nécessaire).

Année	**Banque B**	**Banque C**
2007	5000	5000
2008		
2009		
2010		
2011		
2012		
2013		
2014		
2015		
2016		
2017		
2018		
2019		
2020		
2021		
2022		
2023		
2024		
2025		

3°) a) Calculer pour chaque placement le taux d'évolution exprimé en pourcentage, arrondi au centième, du capital à la fin des dix-huit années.
b) Quel est le placement le plus avantageux ?
c) À la suite à ce constat, les parents déposent 10 000 € sur le placement le plus avantageux, au lieu de 5 000 €. Quelle sera la somme disponible à la majorité de leur fils (c'est-à-dire pour ses 18 ans) ?

2 Durant l'année 2004, le nombre de familles qui ont loué un emplacement au « camping de la plage » est 500.
Le directeur prévoit pour l'avenir une augmentation annuelle de fréquentation de 5 %.
On désigne par :
u_0 le nombre de familles reçues par le camping en 2004 ($u_0 = 500$),
u_1 le nombre de familles reçues par le camping en 2005,
u_2 le nombre de familles reçues par le camping en 2006,
u_n le nombre de familles reçues par le camping en $2004+n$.

1°) Calculer u_1 et u_2. Arrondir à l'unité les deux résultats.
2°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
3°) En supposant que la tendance se poursuive, combien de familles le directeur peut-il espérer pour l'année 2011 ?

3 Un « petit épargnant » place 1500 € le 1er août 2002. À cette époque, le taux de placement à intérêts composés est de 3 % l'an.
1°) a) Par quel nombre doit-on multiplier 1500 afin d'obtenir la somme que cet épargnant aurait pu récupérer un an après ?
b) Les sommes récupérables chaque année, les 1er août, forment une suite de nombres. Est-elle géométrique ou arithmétique ? Quelle est sa raison ?
c) Cet épargnant espérait récupérer au août 2012 la somme ainsi placée avec ses intérêts.
Quelle somme A pouvait-il espérer récupérer à cette date (arrondir le résultat à l'unité) ? Quel aurait été alors le montant des intérêts en euro ?
2°) Mais le 1er août 2003, le gouvernement a décidé de baisser ce taux d intérêts à 2,25 %.
a) Calculer la somme que cet épargnant pourra récupérer le 1er août 2004.
b) En supposant que ce taux d'intérêts composés de 2,25 % reste inchangé jusqu'au 1er août 2012, quelle somme B pourra-t-il récupérer ainsi à cette date ?
3°) a) Quelle sera au 1er août 2012 la différence $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ en euros ?
b) Que représente en pourcentage cette différence par rapport au montant de l'intérêt espéré calculé à la question 1°) c) ?

4 Monsieur Guillaume, artisan menuisier, désire acquérir la machine en 2005. Au 1er janvier 2001, il a placé la somme de 16000 euros, à intérêts composés au taux annuel de 6,75 %. On note u_n le capital, exprimé en euros, disponible au 1er janvier de l'année $2001+n$.
1°) Calculer u_1, u_2 et u_3 (arrondir à l'unité près).
2°) Démontrer qu'il ne disposera pas au 1er janvier 2005 de la somme nécessaire à l'acquisition de la machine si le prix de celle-ci est estimé à 22 500 euros.
Quelle somme lui manquera-t-il ? (arrondir à 100 euros près).
3°) Déterminer la somme, exprimée en euros, qu'il aurait dû placer au 1er janvier 2001 pour disposer du capital nécessaire à l'achat de la machine au 1er janvier 2005 (arrondir la somme à 10 euros près).

5 Le 1er janvier 2002, René a placé 5000 euros à intérêts composés, au taux annuel de 3 %.
On note C_n le capital en euros de René au 1er janvier de l'année $2002+n$.
1°) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire la nature de la suite (C_n).
Exprimer C_n en fonction de *n*.
2°) Au 1er janvier 2010, René aura besoin d'une somme de 7000 euros.
Son capital sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ?

Question facultative : À quel taux minimal aurait-il dû placer son capital le 1er janvier 2002 pour disposer d'au moins 7000 euros au 1er janvier 2010 ? Arrondir le résultat au dixième.

6 Le but de cet exercice est de comparer les tarifs mensuels de location de deux appartements de même type, nommés X et Y, dans deux villes de France.

Partie A. Étude du tarif de location de l'appartement X

On note u_n le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement X en $1990+n$.
Ainsi u_0 est le tarif mensuel de location de l'appartement X en 1990 (attention, il s'agit du tarif de location durant tous les mois de l'année 1990).
On définit ainsi la suite (u_n) des tarifs mensuels de location, en euros, de l'appartement X.
En 1990, le tarif de location est de 413 euros et chaque année il est augmenté de 12 €.
1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.
3°) Calculer le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement X en 2006.

Dans les parties B et C, les résultats seront arrondis au dixième.

Partie B. Étude du tarif de location de l'appartement Y

On note v_n le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement Y en $1990+n$. En 1990, le tarif mensuel de location est de 400 euros et chaque année il est augmenté de 2,7 %.
1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n) et préciser sa raison.
2°) Exprimer v_n en fonction de *n*.
3°) Calculer le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement Y en 2006.

Partie C. Comparaison des deux tarifs de location des appartements X et Y

1°) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	u_n	v_n
0	413	400
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

2°) En quelle année le tarif mensuel de location de l'appartement X devient-il plus avantageux que celui de l'appartement Y ?

7 La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon de cet élément est divisé par 2.

1°) Un échantillon contient 5 g de radium.
Quelle sera la masse de radium dans 10 500 ans sachant que la période de désintégration du radium est de 1500 ans?

2°) La période de désintégration de l'iode 131 est de 8 jours.
Quelle était, il y a 1000 jours, la masse de l'iode 131 dans un échantillon qui en referme aujourd'hui 1 gramme ?

Corrigé

1 1°) Les parenthèses sont obligatoires pour noter une suite.

$B_{n+1} = 5\ 000 \times \frac{5}{100} + B_n$ soit $B_{n+1} = B_n + 250$

La suite (B_n) est une suite arithmétique de raison $r = 250$.

$C_{n+1} = \left(1 + \frac{4,5}{100}\right) \times C_n$ soit $C_{n+1} = 1,045 \times C_n$

La suite (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,045$.

2°) Pour remplir la colonne de la banque B, ce n'est pas très difficile, on ajoute toujours 250 (250 € = intérêt annuel) au résultat précédent.

Pour remplir la colonne de la banque C, on multiplie chaque fois le résultat précédent par 1,045.
On arrondit les résultats au centième à partir du moment où c'est utile comme le demande l'énoncé.

Année	**Banque B**	**Banque C**
2007	5000	5000
2008	5250	5225
2009	5500	5460
2010	5750	5705
2011	6000	5962
2012	6250	6230
2013	6500	6511
2014	6750	6804
2015	7000	7110
2016	7250	7430
2017	7500	7765
2018	7750	8114
2019	8000	8479
2020	8250	8860
2021	8500	9259
2022	8750	9676
2023	9000	10110
2024	9250	10500
2025	9500	11040

3°) a)

Banque B : $\frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 = \frac{9\ 500 - 5\ 000}{5\ 000} \times 100 = 90\ \%$

Banque C : $\frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 = \frac{11\ 040 - 5\ 000}{5\ 000} \times 100 = 120,84\ \%$

b) Le placement le plus avantageux est la banque C.

c)

10 000 €	
Banque B	**Banque C**
Au bout de 18 ans	
$10\ 000 + 18 \times 250 = 14\ 500$ €	$10\ 000 \times 1,045^{18} \approx 22\ 085$ € (valeur arrondie à l'unité)
(formule $B_n = B_0 + n \times r$)	(formule $C_n = C_0 \times q^n$)

2 **Modélisation discrète**

Modélisation par une suite géométrique (car 5 % d'augmentation annuelle, cela signifie que chaque fois le nombre est multiplié par 1,05).
5 % d'augmentation annuelle cela signifie que chaque année, le nombre de personne augmente de 5 % par rapport à l'année d'avant et non par rapport à l'année de base (2004).

Il faut donc retenir ce type de formulation d'énoncé : « augmentation annuelle 5 % » signifie « augmentation chaque année de 5 % par rapport à l'année d'avant ».

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 5 % est égal à $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.

1°) $u_1 = 500 \times 1,05 = 525$; $u_2 = 525 \times 1,05 = 551,25$

2°) La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison 1,05.

3°)

$u_7 = u_0 \times q^7$

$u_7 = 500 \times 1,05^7$

$u_7 \approx 703,23$ (valeur arrondie)

Faire une phrase de conclusion.

En 2011, le gérant du camping peut espérer environ 703 familles.

$\boxed{3}$ 1°) a) On doit multiplier 1 500 par $1+\frac{3}{100}=1{,}03$.
b) Le placement est à intérêts composés.
D'après le cours, la suite est géométrique de raison 1,03.
c) $u_{10}=1500\times1{,}03^{10}\approx 2016$
Il peut espérer récupérer 2016 €.
$2016-1500=516$
Le montant des intérêts est de 516 €.

2°)

a) De 2002 à 2003, il récupère environ 1545 €.
De 2003 à 2004, $1545\times1{,}025=1580$

b) $1545\times\left(1+\frac{2{,}25}{100}\right)^9\approx 1887$ €

3°) a) $A-B=2016-1886=130$

b) $\frac{130}{2016}\times100\approx 6{,}45$ %

$\boxed{4}$

1°) Calculons u_1.

$u_0=16000$

$u_1=16\ 000\times1{,}0675=17\ 080$

$u_2=17\ 080\times1{,}0675=18232{,}9$

$u_3=18232{,}9\times1{,}0675=19\ 463$

2°) $u_4=19463\times1{,}0675$

Il manquera 1700 €

3°) Soit a la somme exprimée en euros qu'il faut placer le 1er janvier 2001 pour pouvoir acheter la machine en 2005.

$a\times1{,}0675^4=22500$ donc $a=\frac{22500}{1{,}0675^4}$ d'où $a\approx17350$ (valeur arrondie à la dizaine)

$\boxed{5}$

1°) Exprimons C_{n+1} en fonction de C_n.

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 3 % est égal à $1+\frac{3}{100}=1{,}03$.

$C_{n+1}=1{,}03\times C_n$.

La suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0=5000$ et de raison 1,03.

Exprimons C_n en fonction de n.

$C_n=C_0\times q^n$
$C_n=5000\times1{,}03^n$

2°) Calculons le capital disponible au 1er janvier 2010 c'est-à-dire C_8.

$C_8=5000\times1{,}03^8$

$C_8\approx 6334$ (arrondi à l'unité)

Le capital disponible au 1er janvier 2010 sera d'environ 6334 €.

Il ne disposera donc pas des 7000 € dont il a besoin.

Question facultative :

$5000\times(1{,}05)^8\approx 7387{,}3$
René aurait dû placer son capital à un taux minimal de 5 % pour disposer d'au moins 7000 euros le 1er janvier.

$\boxed{6}$ **Tarifs mensuels**

Partie A. Étude du tarif de location de l'appartement X

1°) tarif de l'année $(n+1)=$ tarif de l'année $n+12$

$u_{n+1}=u_n+12$

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison 12.

2°) Exprimons u_n en fonction de n.

$u_{n+1}=u_0+nr$
$u_n=413+12n$

3°) Calculons le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement X en 2006.

On calcule u_{16}.
$u_{16}=413+12\times16=605$ €

Partie B. Étude du tarif de location de l'appartement Y

1°) Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2,7 % est égal à $1+\frac{2,7}{100}=1,027$.
Chaque année le tarif mensuel de location est augmenté de 2,7 % donc est multiplié par 1,027.

On peut donc écrire $v_{n+1}=1,027v_n$.
On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0=400$ et de raison $q=1,027$.

2°) Exprimons v_n en fonction de *n*.

$v_n=v_0\times q^n$
$v_n=400\times(1,027)^n$

3°) Calculons le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement Y en 2006.

$v_{16}=400\times(1,027)^{16}$

$v_{16}\approx 613$ (valeur arrondie à l'unité)

En 2006, le tarif mensuel de location de l'appartement Y s'élèvera à 613 €.

Partie C. Comparaison des deux tarifs de location des appartements X et Y

1°)

n	u_n	v_n
0	413	400
1	425	410,8
2	437	421,9
3	449	433,3
4	461	445
5	473	457
6	485	469,3
7	497	482
8	509	495
9	521	508,4
10	533	522,1
11	545	536,2
12	557	550,7
13	569	565,6
14	581	580,8
15	593	596,5
16	605	612,6

2°) On cherche le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n < v_n$.
Dans le tableau de valeurs, on trouve $n=15$.

Donc le tarif mensuel de location de l'appartement X deviendra plus avantageux que celui de l'appartement Y à partir de l'année 2027.

$\boxed{7}$

1°) Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puisque la masse est divisée par 2 tous les 1500 ans. Dans 10 500 ans le radium se sera désintégré 7 fois :
$u_0 = 5$ g
$u_1=2,5$ g
$u_2=1,25$ g
$u_3=0,625$ g
$u_4=0,3125$ g
$u_5=0,15625$ g
$u_6=0,078125$ g

$u_7=0,00390625$ g

Conclusion : Dans 10 500 ans l'échantillon de radium pèsera 0,00390625 g.

2°) Il s'agit d'une suite géométrique de raison 2 puisque la masse est divisée par 2 tous les 8 jours.

$\frac{1000}{8}=125$ désintégrations

$m=1\times 2\times 125=250$ g