TS # Exercices sur le produit scalaire dans l'espace

$\boxed{1}$ Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

1°) Décrire les faces du tétraèdre.

2°) Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}$.

3°) Démontrer que (AB) $\perp$ (CD).

$\boxed{2}$ Soit ABCDEFGH est un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).

Calculer $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{HC}$.

$\boxed{3}$ Soit OAB un triangle rectangle en O. Soit Δ la perpendiculaire en O au plan (OAB) et soit C un point de Δ distinct de O.

1°) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{CA}$.

2°) Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).
Démontrer que (CH) est orthogonale à (AB).

$\boxed{4}$ Soit ABCDEFGH un cube d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et M un point quelconque de (FG).
Déterminer le projeté orthogonal de M sur (AB).
En déduire $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB}$.

$\boxed{5}$ Soit A, B, C trois points de l'espace tels que B $\neq$ C.
Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC}$.

$\boxed{6}$ Soit A et B deux points distincts de l'espace.

1°) Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que $\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 0$.

2°) Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que $\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$.

$\boxed{7}$ Soit A et B deux points de l'espace $\mathcal{E}$ tels que AB = 4.
Déterminer suivant les valeurs du réel k l'ensemble E_k des points M de $\mathcal{E}$ tels que l'on ait $MA^2 + MB^2 = k$.

On rédigera clairement la recherche :

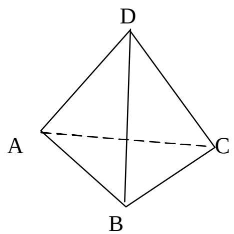
$M \in E_k \Leftrightarrow \ldots\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots$

On conclura en faisant une discussion sur k.

Corrigés

$\boxed{1}$ **Mettre la figure**



1°) Les faces du tétraèdre ABCD sont toutes des triangles équilatéraux.

2°) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$

1ère méthode : expression trigonométrique du produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = a \times a \times \cos 60° = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos \widehat{BAD} = a \times a \times \cos 60° = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Remarque d'écriture :

- On évitera d'écrire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right)$ (écriture lourde de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$)

- On évitera absolument d'écrire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$.

En effet, l'écriture $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans cet ordre.
Or il n'y a pas d'angles orientés dans l'espace.

2e méthode : utilisation du projeté orthogonal

Il faut introduire les milieux.

3°) On calcule $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$ et on montre que ce produit scalaire est égal à 0.

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

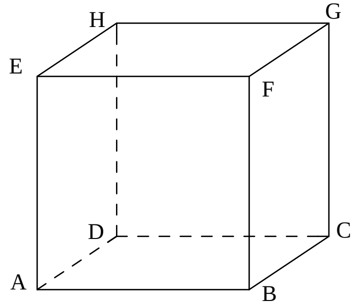
Donc (AB) $\perp$ (CD) (les droites (AB) et (CD) sont orthogonales ; ces deux droites ne sont pas sécantes).

On pourra retenir le résultat que nous venons de démontrer :

Dans un tétraèdre régulier, toute arête est orthogonale à l'arête opposée.

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = a^2$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = a^2$, $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AG} = -a^2$, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Solution détaillée :



• Calcul de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$

J'aurais dû faire ce 1er produit scalaire dans un pavé droit pour éviter que les élèves de se précipitent sur la formule avec le cosinus.

1ère méthode :

Le projeté orthogonal de F sur (AE) est E (il n'y a pas besoin de le démontrer) donc :
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = a^2$

2e méthode :

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = AE \times AF \times \cos \widehat{EFA}$
On a : $AF = a\sqrt{2}$ (car la diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$, simple application du théorème de Pythagore) et $\widehat{EFA} = \frac{\pi}{4}$ (on peut écrire cette égalité directement ou donner une petite explication).
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = a \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = a \times a\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$

• Calcul de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH}$

1ère méthode :

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CH}$
Le projeté orthogonal de H sur (CG) est G (il n'y a pas besoin de le démontrer) donc :
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} = CG^2 = a^2$

2e méthode :

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(-\overrightarrow{EA}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{EB}\right) = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = ...$

• Calcul de $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AG}$

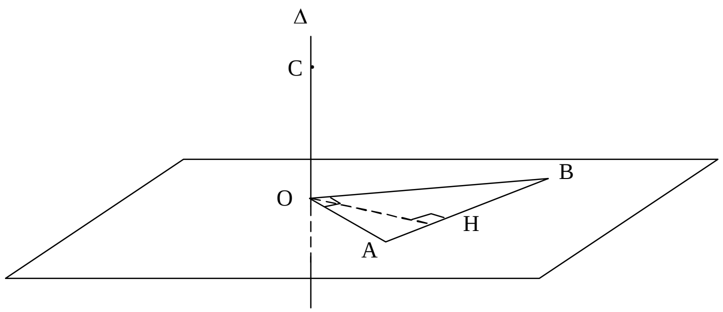
$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$
Le projeté orthogonal de G sur (AB) est B donc $-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2 = -a^2$

• Calcul de $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ car (AF) et (EB) sont perpendiculaires (diagonales du carré ABFE).

$\boxed{3}$ Faire une figure en perspective cavalière.

Faire la figure en deux temps : 1er temps sans le point H ; deuxième temps avec le point H.



Rappel : Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Rappel : définition de deux droites orthogonales dans l'espace

On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales pour exprimer que leurs parallèles menées d'un point de l'espace sont perpendiculaires.

Autrement dit, deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas forcément sécantes (elles ne sont pas forcément coplanaires).

1°) Tous les produits scalaires valent 0.

Démonstration :

La droite Δ est orthogonale au plan (OAB) donc elle est orthogonale à toutes les droites du plan (OAB).
Or la droite (AB) est incluse dans le plan (OAB) donc Δ ⊥ (AB).
Or O et C sont deux points distincts de Δ donc les droites (OC) et Δ sont confondues.
Par suite, (OC) ⊥ (AB).

On en déduit que $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)=\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}_{0}=0$$

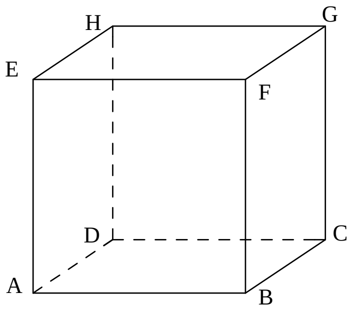
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OB}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)=\underbrace{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}_{0}=0$$

2°) On calcule le produit scalaire.

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0}=0$$

(CH) $\perp$ (AB)

$\boxed{4}$ **Figure du cube (à mettre) :**



On cherche le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).
Le plan passant par M et perpendiculaire à la droite (AB) est le plan (BCF).
Ce plan coupe la droite (AB) en B.
Donc B est le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

Par conséquent, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$ (distance AB au carré)

Remarque intéressante : Le projeté orthogonal de tout point de (BCF) sur la droite (AB) est B.

$\boxed{5}$ L'ensemble F est le plan passant par A et perpendiculaire à (BC).

Solution détaillée :

On rédige par chaîne d'équivalences.

$$\begin{aligned}
M\in F &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

F est le plan passant par A perpendiculaire à (BC).

(Attention, on est dans l'espace donc l'ensemble est bien un plan et non une droite.)

Figure à faire (certains élèves ne comprennent pas très bien pourquoi cet ensemble est un plan).

$\boxed{6}$ 1°) On note I le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$
et J le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$ et $(B\,;1)$.
J est l'isobarycentre des points A et B donc J est le milieu du segment [AB]

D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace, on a :
$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MJ}$.

$$\begin{aligned}
M\in E &\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MI}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MJ}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 6\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}\right)=0
\end{aligned}$$
(on utilise la règle $\left(a\vec{u}\right)\cdot\left(b\vec{v}\right)=ab\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$, utilisation de la bilinéarité du produit scalaire)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MJ}
\end{aligned}$$

Comme les points I et J ne sont pas confondus, on en déduit que l'ensemble E est la sphère de diamètre [IJ].

2°) D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace, on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$
D'autre part, pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$.

$$\begin{aligned}
M\in F &\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MI}\right)\cdot\overrightarrow{BA}=0\\
&\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{BA}
\end{aligned}$$

L'ensemble F est le plan passant par I et orthogonal à (AB).

$\boxed{7}$ $E_k=\{\,M\in E\,/\ MA^2+MB^2=k\,\}$

Déterminons suivant les valeurs du réel *k* l'ensemble E_k.

1ère étape : réduction de la somme du membre de gauche

Soit I le milieu du segment [AB].

D'après la formule de la médiane, $\forall M\in \boldsymbol{E}\quad MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

Or $AB = 4$ donc $\forall M \in \mathcal{E} \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$.

2^e étape : recherche de l'ensemble E_k

$$\begin{aligned} M \in E_k &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = k \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = k \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k-8}{2} \end{aligned}$$

3^e étape : nature de l'ensemble E_k suivant les valeurs de k

On regarde le signe de $\frac{k-8}{2}$.

Discussion sur k :

- Si $k < 8$, alors $\frac{k-8}{2} < 0$.

  Dans ce cas, $E_k = \varnothing$.

- Si $k > 8$, alors $\frac{k-8}{2} > 0$.

  Dans ce cas, $M \in E_k \Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k-8}{2}}$

  E_k est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-8}{2}}$.

- Si $k = 8$, alors $\frac{k-8}{2} = 0$.

  Dans ce cas, $M \in E_k \Leftrightarrow MI = 0$

  $\Leftrightarrow M = I$

  E_8 est le singleton {I}.